

KRITISCHE FLUKTUATIONEN UND DIFFUSION
IN HAMILTONSCHEN SYSTEMEN

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
PETER DEESKOW
aus Duisburg

Bochum 1989





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543113_0004

KRITISCHE FLUKTUATIONEN UND DIFFUSION IN HAMILTONSCHEN SYSTEMEN

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Physik
und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Peter Deeskow

aus

Duisburg

Bochum 1989

Dissertation eingereicht am :

Tag der mündlichen Prüfung :

Referent :

Korreferent :

FÜR MEINE ELTERN

DIE TATSACHEN SIND
DIE SCHWACHSTELLEN
DER THEORIE
(Ein Kalenderspruch)

Herrn Prof. Dr. K. Elsässer gebührt für die Anregung zu dieser Arbeit, stetes Interesse an ihrem Fortgang und fruchtbare Diskussionen besonderer Dank. Danken möchte ich an dieser Stelle auch Herrn Prof. Dr. Schindler, der trotz zahlreicher anderweitiger Verpflichtungen das Korreferat übernahm. Nicht unerwähnt bleiben sollte Alfred Heimsoth, bei dem ich stets ein offenes Ohr für die Schwierigkeiten fand, die sich im Laufe der hier vorgestellten Untersuchungen ergaben.

INHALT

1. Aufgabenstellung	1
2. Ein physikalisches Modell	4
2.1 Teilchenbeschleunigungsprozesse während Sonnenfackeln	5
2.2 Das verwendete Modell	8
2.3 Ergänzung: Lower-Hybrid Wellen	10
3. Abschätzung optimaler Spektren	13
3.1 Grundlagen Hamiltonscher Stochastizität in Systemen mit zwei Freiheitsgraden	13
3.2 Optimale Spektren für Teilchen- beschleunigung	27
3.3 Diskussion numerischer Ergebnisse	38
4. Stochastische Beschleunigung in Potenzspektren	43
4.1 Grundlagen der quasilinearen Theorie	44
4.2 Anwendung auf das Modell	53
4.3 Analytische Lösung der quasilinearen Diffusionsgleichung für $\eta > 2.5$	56
4.4 Konsequenzen der quasilinearen Theorie für die stochastische Beschleunigung	64
4.5 numerische Verifikation der QLT	69
5. Zusammenfassung und Diskussion	75
Anhang A) Numerische Integration chaotischer Trajektorien	79
Literatur	81
Abbildungen	

1. DIE AUFGABENSTELLUNG

Die stochastische Beschleunigung von geladenen Teilchen durch elektrostatische oder elektromagnetische Wellen ist ein weit verbreitetes Phänomen. Sie ist in astrophysikalischen Plasmen einer der vorstellbaren Mechanismen, die zur Erzeugung von hochenergetischen Partikeln in Sonnenkorona, Magnetosphäre oder galaktischer kosmischer Strahlung führen [MELROSE (1980a)]; in Laborplasmen trägt sie zur Heizung durch Ionenzyklotron-, lower-hybrid- oder Alfvén-Wellen bei und kann für anormalen Transport im Zusammenhang mit Driftwellen verantwortlich sein [FREDERICKS (1967), KARNEY & BERS (1977), KARNEY (1978,1979), SMITH & KAUFMANN (1975,1978), KRLIN et al. (1987), HORTON & CHOI (1987)]. Der erste Schritt zur Bearbeitung dieses Problems ist offenbar, die selbstkonsistente Kopplung von Wellen und Teilchen zu vernachlässigen. Im Rahmen dieser Näherung ist die quasilineare Theorie (QLT) von VEDENOV, VELIKHOV & SAGDEEV (1962) bzw. DRUMMOND & PINES (1962) eher traktabel, und der Rechenzeitaufwand für numerische Simulationen wird erheblich reduziert.

Besonders intensiv untersucht wurde hiermit die Teilchenbeschleunigung durch longitudinale elektrostatische Wellen, die im Zusammenhang mit der Erzeugung schneller Elektronen in einer Sonnenfackel auch von astrophysikalischer Bedeutung ist. Eine der ersten entsprechenden Arbeiten [GARY & MONTGOMERY (1968)] fragt, welche Wellenspektren optimal für die stochastische Beschleunigung sind, und untersucht unter anderem, inwieweit die Teilchenbeschleunigung durch quasilineare Diffusion beschrieben werden kann; abschließende Antworten können GARY & MONTGOMERY aber nicht anbieten. Insbesondere der letzte Aspekt, also die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der QLT, ist in der Folge immer wieder in unterschiedlichem Zusammenhang diskutiert worden. Aussagen hierzu finden sich bei FLYNN (1970), der den Zusammenhang von Heizung und quasilinearer Diffusion untersucht, ebenso wie bei GRAHAM & FEJER (1975), die trapping-Effekte studieren. DOVEIL & GRESILLON (1982) sowie ISHIHARA & HIROSE (1984) schließlich kommen im Rahmen numerischer Studien zu einem gewissen Abschluß der Diskussion. Sie

bestätigen für nicht zu große Amplituden der Wellen die QLT, während oberhalb einer scharf definierten Grenze weder die QLT noch ihre Verbesserung in Form der resonance-broadening Theorie [DUPREE (1966)] mit dem numerischen Experiment übereinstimmen.

Bisher nicht oder nur am Rande betrachtet wurde die von GARY & MONTGOMERY (1968) aufgeworfene Frage nach den optimalen Spektren für Teilchenbeschleunigung in longitudinalen elektrostatischen Wellen; ebenso haben die physikalischen Konsequenzen der QLT selten eine ausführliche Diskussion erfahren. Die Erörterung dieser beiden Problemkreise ist daher Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Das nötige Rüstzeug, das es ermöglichen wird abzuschätzen, welche Spektren in einem noch näher zu definierenden Sinn optimal für die stochastische Beschleunigung sind, stellt dabei eine Theorie bereit, die in den letzten zehn Jahren stetig zunehmendes Interesse erfahren hat. Ich werde intensiven Gebrauch machen von den grundlegenden Erkenntnissen über das generische Verhalten nahezu integrierbarer Hamiltonscher Systeme mit zeitlich oder räumlich periodischer Störung, die vielfache theoretische Diskussion erfahren haben [vgl. z.B. die Darstellungen bei ZASLAVSKII & CHIRIKOV (1972), CHIRIKOV (1979), GREENE (1979,1980), LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983), ESCANDE (1985)]. Damit wird hier explizit die Tatsache ausgenutzt, daß bei Vernachlässigung der selbstkonsistenten Wechselwirkung von Wellen und Teilchen ein Modell mit Hamiltonscher Struktur die stochastische Beschleunigung beschreibt.

Das im Rahmen dieser Überlegungen optimale Spektrum hat eine Potenzform, was es naheliegend erscheinen läßt, die quasilineare Theorie für solche Potenzspektren im Detail zu diskutieren. Die vorliegende Arbeit ergänzt damit eine Untersuchung von WU, GAFFEY & LIBERMAN (1981), die dies für einen anderen Parameterbereich als den hier interessant erscheinenden durchführt. Eine numerische Untersuchung einer speziellen Repräsentation des hier verwendeten Modells verifiziert die analytischen Ergebnisse und bietet überdies eine Gelegenheit, die CHIRIKOVsche Overlap-Argumentation [CHIRIKOV (1972)] und das GREENEsche Kriterium [GREENE (1979,1980)] für das Verschwinden von KAM-Flächen auf ihre Aussagekraft hin zu

vergleichen. Zusätzlich ist es von Interesse, aus den Daten die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten zu bestimmen; ein solcher modellabhängiger Test der QLT geht über die meisten früheren Arbeiten hinaus (mit einer Ausnahme: FUCHS, KRAPCHEV, RAM & BERS (1985)).

Das oben skizzierte Programm wird in der vorliegenden Arbeit wie folgt durchgeführt. Kap.2 führt zunächst das hier verwendete Modell ein. Dazu zitiert Kap.2.1 einige experimentelle Ergebnisse, die auf die Relevanz von stochastischer Teilchenbeschleunigung in Langmuir-Turbulenz für die Anfangsphase einer Sonnenfackel schließen lassen und erörtert kurz die in diesem Zusammenhang denkbaren Anregungsmechanismen für Langmuir-Wellen. Kap.2.2 schließlich formuliert unser Modell für die Beschleunigung geladener Teilchen in longitudinalen elektrostatischen Wellen und steckt ab, in welchem Rahmen es reale physikalische Situationen beschreibt. Ergänzend zeigt Kap.2.3 auf, daß es mit unwesentlichen Modifikationen ebenso die Bewegung von Elektronen parallel zum Magnetfeld unter dem Einfluß von lower-hybrid-Wellen darstellt.

Kap.3 schätzt dann die optimale Form der Wellenspektren ab. Dazu stellt Kap.3.1 zusammenfassend die Grundlagen Hamiltonscher Stochastizität in Systemen mit zwei Freiheitsgraden dar, wobei die Kriterien von CHIRIKOV (1972) und GREENE (1979) für das Verschwinden von KAM-Flächen zwischen benachbarten Resonanzen eingeführt werden. Kap.3.2 wendet dann in einer detaillierten Diskussion die Overlap-Argumentation auf das in Kap.2 vorgestellte Modell an. Wir werden hier zunächst die Ausdehnung des Bereichs globaler Stochastizität im Phasenraum bei gegebenem Spektrum abschätzen und daraus ableiten, welches Spektrum die minimale mittlere Energiedichte benötigt, um in einem gegebenem Geschwindigkeitsintervall stochastische Beschleunigung zu ermöglichen; die Abhängigkeit dieser minimalen Energiedichte von physikalischen Parametern wird untersucht werden. Kap.3.3 führt sodann eine spezielle numerische Repräsentation unseres Modells ein und stellt die Ergebnisse einer Integration der entsprechenden Bewegungsgleichungen den analytischen Resultaten aus Kap.3.2



gegenüber, wobei wir auch die Relevanz von Modellen mit wenigen nichtverschwindenden Fouriermoden für die Simulation stochastischer Beschleunigung erörtern. An dieser Stelle ist auch ein Vergleich der Aussagekraft von CHIRIKOVschem und GREENEschem Kriterium möglich.

Kap.4 gibt im Anschluß hieran eine ausführliche Diskussion der quasilinearen Theorie. Nachdem Kap.4.1 ihre Ableitung skizziert hat, spezialisiert Kap.4.2 die Gleichungen auf Potenzspektren und stellt die unserem Modell angemessenen Randbedingungen an die quasilineare Diffusionsgleichung, deren analytische Lösung sodann in 4.3 vorgeführt wird. Kap.4.4 wertet die Ergebnisse aus 4.2 und 4.3 mit Blick auf ihre Konsequenzen für die stochastische Beschleunigung aus. Kap.4.5 schließlich ermittelt aus den Daten unserer numerischen Simulation die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten und setzt die Ergebnisse in Relation zur QLT ebenso wie zu den Aussagen der Theorie stochastischer Hamiltonscher Systeme.

Kap.5 faßt die zentralen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit noch einmal kurz zusammen.

2. EIN PHYSIKALISCHES MODELL

In der Einleitung ist bereits darauf hingewiesen worden, daß die Beschleunigung geladener Teilchen im Feld elektrostatischer und elektromagnetischer Wellen auf Energien weit jenseits der thermischen ein weitverbreiteter Effekt sowohl in astrophysikalischen wie in Laborplasmen ist. Das hier betrachtete Modell beschreibt in diesem Zusammenhang die Beeinflussung der Elektronenverteilungsfunktion durch Langmuirwellen in einem unmagnetisierten Plasma bzw. bei Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld und betrachtet damit in stark vereinfachter Weise einen der Mechanismen der ersten Beschleunigungsphase von Elektronen bei energiereichen Eruptionen (flares) auf der Sonne.

2.1 TEILCHENBESCHLEUNIGUNGSPROZESSE WÄHREND SONNENFACKELN

Das Auftreten energiereicher (d.h. mit Energien von 10keV und mehr) Teilchen wird heute als eines der wesentlichen Charakteristika von Sonnenfackeln angesehen [RAMATY (1980)]. Experimentelle Hinweise auf die Beschleunigung von Teilchen während solcher Ereignisse liefern neben direkten Messungen des Energiespektrums von Elektronen und Protonen in Satelliten- wie auch terrestrischen Experimenten [z.B. LIN (1974,1982)] insbesondere sorgfältige Auswertungen von Beobachtungen harter Röntgenstrahlung [z.B.: HYONG (1976)] und Radioemissionen [z.B. FAIBERG & STONE (1974), DULK & SUZUKI (1980)]. Die Anfangsphase einer Sonnenfackel wird gemäß diesen Beobachtungen [vgl. KANE (1980)] bestimmt durch plötzliche Emission kontinuierlicher Röntgenstrahlung (im Bereich $\geq 20\text{keV}$) und durch typische Ausbrüche im RF - Bereich, sog. typ III radio bursts. (Die Klassifikation bezieht sich auf die Form des dynamischen Spektrums [vgl. GOLDMANN & SMITH (1986)].) Eine Reihe von Autoren findet nun eine zeitliche Korrelation zwischen diesen beiden Emissionen [z.B. KANE (1972)], sowie deren Koinzidenz mit dem Auftreten schneller Elektronen mit Energien zwischen 10keV und 100keV [LIN (1974)]. Man hat also Anlaß zu vermuten, daß eben diese Teilchen für die meisten in der Anfangsphase einer Sonnenfackel beobachtbaren Phänomene verantwortlich sind [RAMATY (1980)], was in der Tat auch durch eine Reihe theoretischer Untersuchungen bestätigt wird.

Die schnellen Elektronen gelangen bei ihrer Erzeugung in einer Sonnenfackel sowohl auf geschlossene Feldlinien, die sie in tiefer gelegene Gebiete hoher Dichte führen, als auch auf offene Feldlinien, entlang derer sie in Gebiete geringerer Dichte (und schließlich in den interplanetaren Raum) gelangen [FORMAN, RAMATY & ZWIBEL (1986)]. Erstere erzeugen im wesentlichen die harte Röntgenstrahlung als Bremsstrahlung [BROWN (1971), HUDSON (1972)], während letztere für die Typ III Mikrowellenausbrüche verantwortlich sind. Ein solcher, entlang offener Feldlinien propagierender Elektronenstrahl wird zunächst vermittels einer bump-on-tail Instabilität in inhomogenen Plasmen [MAGELSEN & SMITH

(1977)] Langmuirwellen emittieren. Diese werden dann durch nichtlineare Wechselwirkungen untereinander oder durch Streuung an thermischen Ionen in elektromagnetische Strahlung mit Frequenzen in der Nähe der Elektronenplasmafrequenz oder deren zweiter Harmonischer konvertiert [GOLDMANN & SMITH (1986)].

Nachdem es also als gesichert angesehen werden kann, daß 10 - 100keV Elektronen für die wesentlichen Phänomene in der Anfangsphase einer Sonnenfackel verantwortlich sind, stellt sich die Frage nach dem entsprechenden Beschleunigungsmechanismus. Dieser Prozeß muß nun, um mit den Messungen in Übereinstimmung zu stehen [vgl. LIN (1974)], in der Lage sein, die Beschleunigung von bis zu 10^{36} Elektronen in weniger als 1s auf Energien über 10keV zu erklären, eine Anforderung, die die meisten der denkbaren Möglichkeiten ausschließt. Weder die direkte Beschleunigung der Teilchen in elektrischen Feldern, die im Zusammenhang mit Rekonnexionsprozessen auftreten, noch die Fermibeschleunigung in hydromagnetischer Turbulenz, noch die Einwirkung von Schockwellen kann sowohl die Zeitskala als auch die Anzahl der Teilchen erklären [MELROSE (1980)]. Als von den meisten Autoren favorisierter Mechanismus der "first phase acceleration" bleibt damit die stochastische Beschleunigung durch Langmuirturbulenz [KUPERUS (1976), SMITH (1977), MELROSE (1980), FORMAN, RAMATY & ZWEIBEL (1986), GOLDMANN & SMITH (1986)] oder lower-hybrid Wellen [WU, GAFFEY & LIBERMANNN (1981), BENZ (1987)]. Hierbei führt die Wechselwirkung der Wellen mit den Teilchen zu deren chaotischer Bewegung, in deren Verlauf einzelne Partikel weit über die thermische Geschwindigkeit hinaus beschleunigt werden können.

Im folgenden betrachten wir diesen Prozeß im Rahmen eines einfachen Modells im Detail. Da hierbei die selbstkonsistente Wechselwirkung von Wellen und Teilchen vernachlässigt wird, erlaubt unsere Untersuchung allerdings keine Aussagen über die Erzeugung der Turbulenz. Diverse Modellvorstellungen machen für deren Anregung letztendlich makroskopische Konvektionsbewegungen verantwortlich. Sie erzeugen über stromgetriebene Mikro- oder Tearinginstabilitäten (vgl. ALFVEN & CARLQUIST (1967) bzw. SPICER (1977, 1981)) und den

Runawayeffekt in räumlich eng begrenzten Gebieten Elektronenpopulationen, deren Driftgeschwindigkeit einige v_{the} beträgt [SMITH (1977a,b)]. In dem umgebenden Plasma regen diese Elektronenstrahlen dann mittels einer gentle-bump-Instabilität Langmuirturbulenz an, die durch das Zusammenwirken vieler solcher lokaler Instabilitätsregionen hinreichende Intensität erreicht, um die betrachteten Energiedichten und Elektronenflüsse zu erklären. Detaillierte Untersuchungen dieser Vorgänge finden in der Regel eine Potenzform der spektralen Energiedichte, $W(k) \sim k^{-\alpha}$, wobei je nach dem betrachteten Modell α zwischen $\alpha=3/2$ und $\alpha=11/2$ liegt [vgl. die Übersicht bei SMITH (1977b)].

Für die erst in jüngerer Zeit näher untersuchte Teilchenbeschleunigung in lower-hybrid Wellen [WU, GAFFEY & LIBERMAN (1981), BENZ (1987)] ist die entsprechende Diskussion der Anregungsmechanismen weniger fortgeschritten. KRALL & LIEWER (1971), McBRIDE et al. (1972) sowie TANAKA & PAPADOPOULOS (1983) weisen im Rahmen quasilinearer Theorie bzw. numerischer Simulationen allerdings nach, daß durch einen Strom senkrecht zum Magnetfeld über eine modifizierte Zweistrominstabilität Wellen angeregt werden können. Letztere propagieren nahezu senkrecht zum Feld mit der lower-hybrid Frequenz $\omega_{LH} = \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2)^{-1/2}$ und stehen in resonanter Wechselwirkung mit Elektronen, die sich mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung der thermischen parallel zum Feld bewegen.

Das Auftreten von Langmuir- (oder auch lower-hybrid-) Wellen mit Potenzspektren ist also zumindest in einer physikalischen Situation, nämlich in Verbindung mit Sonnenfackeln plausibel. Vor diesem Hintergrund ist denn auch das im folgenden vorgestellte Modell zu sehen, das die stochastische Beschleunigung von geladenen Teilchen im Feld vorgegebener longitudinaler elektrostatischer Wellen beschreibt.

2.2 DAS VERWENDETE MODELL

Wir untersuchen die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in einem äußeren, longitudinalen elektrischen Feld $E(x,t)$, das sich vom einem Potential $\Phi(x,t)$ ableitet, $E = -\partial\Phi/\partial x$. Dann ist die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + q\Phi(x,t) \quad , \quad p = mv \quad (2.1)$$

und die entsprechenden Hamiltonschen Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} = v \\ \frac{dp}{dt} &= -q \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} = qE(x,t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für die zeitliche Entwicklung der Dichte $f(x,v,t)$ eines Ensembles von Teilchen im (x,v) -Phasenraum gilt mit der Poissonklammer $[a,b] = \partial a/\partial x \cdot \partial b/\partial p - \partial a/\partial p \cdot \partial b/\partial x$ die Liouville- Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left\{ f, H \right\} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} \cdot E(x,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (2.3)$$

Das elektrostatische Feld entspreche nun einer Welle mit einer Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$. Dann hat $E(x,t)$ für endliche Systeme der Länge L mit periodischen Randbedingungen die Darstellung

$$E(x,t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i k_n \Phi_n \cdot \exp[i(k_n x - \omega(k_n)t)] \quad (2.4)$$

mit $k_n = 2\pi n/L$.

Gleichung (2.3) beschreibt im Rahmen stark vereinfachender Annahmen die Beschleunigung von Elektronen durch Langmuirturbulenz in der Sonnenkorona. In Strenge wäre eigentlich die Vlasovgleichung

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_e - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = 0$$

für die zeitliche Entwicklung der Einteilchenverteilung f_e der Elektronen in dreidimensionaler Geometrie simultan mit den das elektrische und magnetische Feld, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, bestimmenden Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

zu lösen. Die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\mathbf{j}$ enthalten neben f_e auch die Verteilungsfunktion der Ionen, für die ebenfalls eine Vlasovgleichung gelöst oder ein geeignetes Modell gefunden werden müßte. Dieses Gleichungssystem reduziert sich jedoch unter geeigneten Annahmen auf eine Gleichung der Form (2.3). Hierzu vernachlässigt man zunächst das Magnetfeld, nimmt also entweder eine eindimensionale Bewegung im schwach magnetisierten Fall ($\Omega_e^2 \ll \omega_{pe}^2$) oder eine Bewegung entlang der Feldlinien in einem starken Feld an ($\Omega_e^2 \gg \omega_{pe}^2$) ($\Omega_e = eB/m_e c$ Elektronengyrofrequenz und $\omega_{pe} = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$ Elektronenplasmafrequenz). Abschätzungen von Dichte n ($n \sim 10^9 \dots 10^{10} \text{ cm}^{-3}$) und Magnetfeld B ($B \sim 250 \text{ G}$) in einer Sonnenfackel [BENZ & SMITH (1987)] ergeben $\omega_{pe} \sim 2.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ und $\Omega_e \sim 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. Mit einiger Großzügigkeit können die Elektronen hier also als stark magnetisiert betrachtet werden.

Um zu einer Gleichung der Form 2.3 zu gelangen, ignoriert man weiterhin die selbstkonsistente Wechselwirkung von Teilchen und Welle. D.h., wir untersuchen unabhängige Partikel in einem vorgegebenen elektrischen Feld, also das Testteilchenproblem. Es ist damit in gewissen Grenzen plausibel, daß die Gleichungen 2.2 bzw. 2.3 ein Modell für die stochastische Elektronenbeschleunigung in Langmuirwellen darstellen. Wir werden im folgenden weiterhin hinreichend kleine Wellenvektoren $k\lambda_D \ll 1$ (worin $\lambda_D = (kT_e / 4\pi n e^2)^{1/2}$

die Debyelänge bei der Elektronentemperatur T_e bezeichnet), mithin also eine Dispersionsrelation $\omega^2 = \omega_{pe}^2$, annehmen. Damit ist in 2.4

$$\omega(k) = \begin{cases} -\omega_{pe} & , \quad k < 0 \\ 0 & , \quad k = 0 \\ \omega_{pe} & , \quad k > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Mit der üblichen Realitätsbedingung $\Phi_k = \Phi_{-k}^*$ bzw. $\Phi_k = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}_{|k|} e^{i\phi_k}$ mit einer Phase $\phi_k = -\phi_{-k}$ und $\Phi_k = 0$ für $k=0$ schreibt sich dann die unserem Modell entsprechende Hamiltonfunktion für ein System endlicher Länge L

$$H = \frac{p^2}{2m} + q \cdot \sum_{n>0} \mathcal{E}_k \cos(k_n x - \omega_{pe} t + \phi_{k_n}) \quad (2.6)$$

Kap.3 wird die Konsequenzen bzgl. der stochastischen Beschleunigung von Elektronen untersuchen, die sich aus der Anwendung der Theorie Hamiltonscher Systeme mit periodischer Störung auf 2.6 ergeben. Kap.4 dagegen wird die quasilineare Theorie der Gleichung 2.3 behandeln. Zuvor soll jedoch noch kurz diskutiert werden, mit welchen Modifikationen unser Modell auch die Teilchenbeschleunigung in lower-hybrid Wellen beschreibt.

2.3 ERGÄNZUNG: LOWER-HYBRID WELLEN

In einem unmagnetisierten Plasma, in dem die Elektronen mit einer Driftgeschwindigkeit v_D gegen die Ionen strömen, treten Buneman-Zweistrominstabilität [BUNEMAN (1959)] und Ionenakustische Instabilität auf. Erstere setzt eine Driftgeschwindigkeit oberhalb der elektronenthermischen $v_{the} = (kT_e/m_e)^{1/2}$ voraus, $v_D \geq v_{the}$, und regt dann Langmuirwellen an. Letztere erzeugt ionenakustische Wellen, die in einem Plasma mit $T_e \approx T_i$ starke Dämpfung erfahren. Sie ist daher nur relevant, wenn die Elektronentemperatur T_e größer als die der Ionen T_i ist, $T_e/T_i \gg 1$. Für ihr Einsetzen sind dann allerdings Driften von der Größenordnung der Ionen-

schallgeschwindigkeit $c_s = (kT_e/m_i)^{1/2}$ hinreichend, $v_D \geq \alpha c_s$,
 $\alpha = 1 + (m_i/m_e)^{1/2} (T_e/T_i)^{3/2} \exp(-3/2 - T_e/2T_i)$ [nach SPICER (1981)].

In einem magnetisierten Plasma führen Ströme parallel zum Feld zu den gleichen Mikroinstabilitäten wie sie im unmagnetisierten Fall auftreten. Ströme senkrecht zum Feld dagegen können eine Reihe anderer Instabilitäten treiben, zu denen die modifizierte Zweistrominstabilität [KRALL & LIEWER (1971)] zählt. Ihr Name erklärt sich aus ihrer Dispersionsrelation, die der von Buneman abgeleiteten ähnlich ist. Sie setzt jedoch schon für Driftgeschwindigkeiten oberhalb der ionenthermischen $v_{thi} = (kT_i/m_i)^{1/2}$ ein und hat auch für $T_e \approx T_i$ nichtverschwindende Anwachsrate. Sie wird daher wesentlich leichter angeregt als die entsprechenden, durch parallele Ströme getriebenen Instabilitäten und ist daher im Zusammenhang mit anormaler Resistivität, Plasmaheizung und stochastischer Elektronenbeschleunigung intensiv untersucht worden [MCBRIDE et al. (1972), TANAKA & PAPADOPOULOS (1983)]. Die größte Anwachsrate unter der modifizierten Zweistrominstabilität haben Wellen mit einer Ausbreitungsrichtung nahezu senkrecht zum Feld [MCBRIDE et al. (1972)], $k_{\parallel}/k \approx (m_e/m_i)^{1/2}$, für die sich die Dispersionsrelation auf $\omega \approx \text{const.} = \omega_{LH} = \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)^{-1/2}$ reduziert, worin $\omega_{pi} = (4\pi n e^2/m_i)^{1/2}$ die Ionenplasmafrequenz bezeichnet. Für ein schwach magnetisiertes Plasma, $\omega_{pe}^2 \gg \Omega_e^2$, ist mit der Ionengyrofrequenz $\Omega_i (= eB/m_i c)$ ω_{LH} gerade die wohlbekannte lower-hybrid Frequenz der Fluidtheorie, $\omega_{LH} \approx (\Omega_e \Omega_i)^{1/2}$. Daher ist es üblich, im Zusammenhang mit der modifizierten Zweistrominstabilität von lower-hybrid Wellen zu sprechen.

Wie schon im Zusammenhang mit der Langmuirturbulenz werden im lower-hybrid Fall im wesentlichen Teilchen des Maxwellschwanzes die Resonanzbedingung $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ erfüllen. Dies läßt sich leicht an Hand einer groben Abschätzung einsehen. Die maximale Anwachsrate tritt auf für Wellenzahlen $k_{max} \approx \sqrt{3} \cdot \omega_{LH}/v_D$ und führt zu Frequenzen $\omega \approx \frac{1}{2} k_{max} v_D$ bei einer Ausbreitung nahezu senkrecht zum Feld, $k_{\parallel}/k \approx (m_e/m_i)^{1/2}$ [MCBRIDE et al. (1972)]. Nehmen wir nun noch an, daß die Elektronen sich im wesentlichen parallel zum Feld bewegen,

daß also eine hinreichend starke Magnetisierung vorliegt. Dann folgt aus der Resonanzbedingung $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$ sofort

$$v_{\parallel} = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \approx \frac{\omega}{k_{max}} \cdot \frac{k_{max}}{k_{\parallel}} \approx \frac{v_D}{2} \cdot \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Für Driftgeschwindigkeiten v_D von einigen v_{thi} , $v_D \geq (6...10)v_{thi}$, liegt der resonante Bereich $v_{\parallel} \geq (3..5)v_{the}$ also bereits hinreichend weit im Maxwellschwanz, sodaß die Landaudämpfung klein ist. Damit ist das Modell aus Kap.2.3 mit der trivialen Ersetzung $kx - \omega_{pe} t = k_{\parallel} x - \omega_{LH} t$ auch für die Beschleunigung von Elektronen in lower-hybrid Wellen angemessen, wobei durch 2.4 dann die Komponente $E_{\parallel}$ des elektrischen Feldes parallel zum Magnetfeld dargestellt wird. Die Gültigkeitsbeschränkung $k\lambda_D \ll 1$ ist zu ersetzen durch $k \approx 0(\sqrt{3} \cdot \omega_{LH}/v_D)$.

Zur Illustrierung dieser Abschätzung seien noch die Verhältnisse in einer Sonnenfackel betrachtet. Nach [SMITH & BENZ (1987)] haben wir in der Anfangsphase eines flares für Dichte n , Magnetfeld B und Elektronentemperatur T_e typische Werte von $n \approx 10^9..10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $B \approx 250 \text{ G}$, $T_e \approx 10^2 \text{ eV}$. Dann ist $\omega_{pe} \approx 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $\lambda_D \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $\omega_{pi} \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$, $\Omega_e \approx 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{LH} \approx 7 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, $v_{the} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0.01c$, $v_{thi} \approx 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ falls $T_e \approx T_i$. Die Frequenz der lower hybrid Wellen ist hier also um einen Faktor 100 niedriger als die der Langmuirturbulenz, während die Wellenzahlbereiche, in denen das hier gewählte Modell zu rechtfertigen ist, vergleichbar sind: Für die obigen Parameter erfüllt $k \approx 0(\sqrt{3} \cdot \omega_{LH}/v_D)$ für $v_D \geq v_{thi}$ auch $k\lambda_D \ll 1$.

Im folgenden Kap.3 wird mit Hilfe der Theorie Hamiltonscher Stochastizität abgeschätzt, welche Wellenspektren in einem *endlichen System* optimal für Teilchenbeschleunigung sind, wobei der Begriff 'optimal' noch näher zu definieren ist. Ich werde weiterhin kurz diskutieren, welche Implikationen diese Ergebnisse für den Limes $L \rightarrow \infty$ beinhalten und numerische Untersuchungen vorstellen, die die der Abschätzung zu Grunde liegenden Annahmen bestätigen.

3. ABSCHÄTZUNG OPTIMALER SPEKTREN

3.1 GRUNDLAGEN HAMILTONSCHER STOCHASTIZITÄT IN SYSTEMEN MIT ZWEI FREIHEITSGRADEN

Die hier relevante Literatur zur Theorie Hamiltonscher Stochastizität betrachtet in der Regel autonome Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Unter Einführung eines um Energie und Zeit als kanonisch konjugierte Variablen erweiterten Phasenraums ist aber leicht zu sehen, daß sich die dort erarbeiteten Ergebnisse sofort auf Systeme mit einem Freiheitsgrad aber explizit zeitabhängiger Störung

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, \tau) \quad (3.1)$$

übertragen. Hierin sind (J, θ) die Wirkungs-Winkel Variablen des ungestörten Systems ($\varepsilon=0$) und es sei $H_1(J, \theta, \tau)$ periodisch in dem Winkel θ und in der Zeit τ mit Periode 2π . Dann läßt sich H_1 durch eine Fourierreihe darstellen

$$H_1(J, \theta, \tau) = \sum_{m, n} H_{mn}(J) \cdot \exp[i(m\theta - n\tau)], \quad (3.2)$$

mit der üblichen Realitätsbedingung $H_{mn}^* = H_{-m, -n}$. Für $\varepsilon=0$ reduziert sich dies offenbar auf ein integrables Problem, dessen ("ungestörte") Bahnen sich trivial aus den entsprechenden Hamiltonschen Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} J &= \text{const.} \\ \theta &= \omega(J)\tau + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.3a)$$

worin

$$\omega(J) = \frac{dH_0}{dJ} \quad (3.3b)$$

(Für den Fall der Teilchenbeschleunigung in vorgegebenen Wellen ist $\omega(J) = \alpha J - v$, wie bei ELSÄSSER & DEESKOW (1987) ausführlich diskutiert.) Das allgemeine Verhalten dieser Bahnen unter dem

Einfluß einer nichtverschwindenden Störung ist nun in der Vergangenheit sorgfältig untersucht worden. Die Ergebnisse dieser Arbeiten haben in den letzten Jahren breites Interesse und weitgehende Verbreitung erfahren, sodaß ich nur die zentralen Aussagen zitieren werde.

Entsprechend den Überlegungen von ZASLAVSKII & CHIRIKOV (1972) betrachten wir zunächst eine spezielle Störung H_1 mit nur einer nichtverschwindenden Fouriermode,

$$H_1 = 2H_{mn} \cdot \cos(m\theta - n\tau + \varphi_{mn}), \quad H_{mn} = \text{const.} \quad (3.4)$$

Wie werden nun die ungestörten Bahnen durch dieses H_1 modifiziert? Aus den Hamiltonschen Gleichungen erhält man für die Phase Ψ_{mn} der Störung,

$$\dot{\Psi}_{mn} = m\dot{\theta} - n\dot{\tau} + \dot{\varphi}_{mn}, \quad (3.5)$$

die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{mn}}{d\tau} &= m\omega(J) - n \\ \frac{dJ}{d\tau} &= 2\epsilon m H_{mn} \sin(\Psi_{mn}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Derjenige Wert J_{mn} der Wirkung J , für den die Phase Ψ_{mn} des (m,n) Modes konstant entlang der ungestörten Bahn $J=J_{mn}=\text{const.}$ ist, sei im folgenden als (m,n) -Resonanz bezeichnet. Die *Resonanzbedingung*

$$m\omega(J_{mn}) - n = 0 \quad (3.7)$$

legt also für monotonen $\omega(J)$ die Resonanz J_{mn} eindeutig fest. Die Abweichung $\Delta J = J - J_{mn}$ bleibt für Bahnen, die in der Nähe dieser Resonanz starten, klein. Unter der Annahme $|\Delta J| \ll J_{mn}$ reduzieren sich die Glgen. 3.6 nämlich auf

$$\frac{d\psi_{mn}}{d\tau} = m\omega(J) - n \approx m\omega' \Delta J$$

$$\frac{d\Delta J}{d\tau} = 2\epsilon m H_{mn} \sin(\psi_{mn}), \quad (3.8)$$

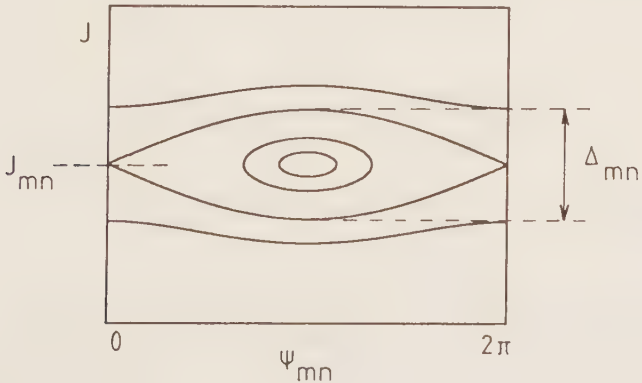
mit

$$\omega' = \frac{d\omega(J)}{dJ} \neq 0.$$

Sie lassen sich von der *Standard-Hamiltonfunktion* H_u

$$H_u = \frac{m\omega'}{2} \cdot \Delta J^2 + 2\epsilon m H_{mn} \cos(\psi_{mn}) \quad (3.9)$$

ableiten. Im (J, ψ_{mn}) -Phasenraum gleichen die Phasenbahnen unter dem Einfluß einer Störung mit nur einem nichtverschwindenden Mode in der Nähe der Resonanz also denen eines Pendels.



Skizze 1

Wie in Skizze 1 angedeutet liegt für $2\epsilon m^2 \omega' H_{mn} > 0$ der stabile Fixpunkt bei $\psi_{mn} = \pi$, die beiden instabilen und wegen der 2π Periodizität eigentlich identischen bei $\psi_{mn} = 0, 2\pi$. Wie üblich nennen wir die Trajektorie, die die hyperbolischen Fixpunkte verbindet,

Separatrix. Sie begrenzt das Gebiet im Phasenraum, innerhalb dessen die Störung zu einer topologischen Änderung der ungestörten $J=\text{const.}$ Bahnen führt. Innerhalb der Separatrix treten *Phasenoszillationen* auf, d.h., die Variation der Phase bleibt beschränkt. Die typische Frequenz für kleine Phasenoszillationen in der Nähe des elliptischen Fixpunktes, die *Bouncefrequenz* ω_B , erhält man mit $\Delta\dot{\Psi}=\dot{\Psi}_{mn}-\pi$ und $\sin(\pi+\Delta\Psi)\sim-\Delta\Psi$ wegen

$$\frac{d^2 \Delta\Psi}{d\tau^2} = -2m^2 \varepsilon \omega' H_{mn} \cdot \Delta\Psi$$

zu

$$\omega_B = m \cdot \sqrt{\omega' 2\varepsilon H_{mn}}. \quad (3.10)$$

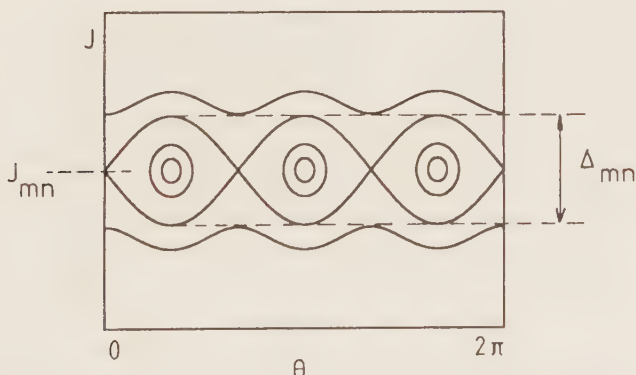
Außerhalb der Separatrix wächst die Phase monoton mit der Zeit, d.h., die ursprünglichen Bahnen werden nur geringfügig verbogen. Die maximale Breite Δ_{mn} der resonanten Insel ergibt sich, da die nicht mehr explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion H zeitlich konstant ist, aus $2\varepsilon m H_{mn} = H(\Delta J=0, \dot{\Psi}=0) = H(\Delta J_{mn}, \dot{\Psi}=\pi) = \frac{1}{2} m \omega'^2 \Delta J_{mn}^2 - 2\varepsilon k H_{mn}$ zu

$$\Delta_{mn} = 4 \cdot \sqrt{\varepsilon 2 H_{mn} / \omega'} \quad (3.11)$$

Eine Trajektorie weicht damit um maximal $\Delta_{mn} \sim \varepsilon^{1/2}$ von den ungestörten $J=\text{const.}$ Bahnen ab.

Die bisherige Diskussion unserer speziellen Störung mit nur einem nichtverschwindenden Mode bezog sich auf den $(J, \dot{\Psi}_{mn})$ -Phasenraum der Standard-Hamiltonfunktion. Das Verhalten der Bahnen im ursprünglichen (J, θ) -Raum läßt sich am besten durch die wohlbekannte *Poincare-Abbildung* veranschaulichen, die für das Hamiltonsche System 3.2 gerade einem stroboskopischen Plot der Phasenraumpunkte zu Zeiten $\tau_i = 2\pi i$, $i=1,2,\dots$ entspricht. Mathematisch etwas sauberer formuliert ist dies eine Abbildung des (J, θ) -Phasenraums auf sich selbst, die einem Punkt (J, θ) den Punkt $\Phi^{\tau_i}(J, \theta)$ zuordnet, wenn $\Phi^{\tau}(J, \theta)$ der Fluß der Hamiltonschen

Gleichungen zu 3.2 ist. Anschaulich erhält man diesen *Surface of Section Plot* also durch Verfolgen der Bahn eines Phasenraumpunktes und markieren seiner Position in der (J, θ) -Ebene zu Zeiten $\tau_i = 2\pi i$. Wegen $\Psi_{mn} = m\theta - n\tau$ und der 2π Periodizität von θ bzw. τ ist nun die Rücktransformation von Ψ_{mn} nach θ gegeben durch $\theta = (\Psi_{mn}/m + n/m \cdot \tau) \bmod_{2\pi}$, d.h. für $\tau = \tau_i$ $\theta_i = (\Psi_{mn}/m + n/m \cdot 2\pi i) \bmod_{2\pi}$. Falls m und n teilerfremd sind, entsprechen jedem Punkt (J, Ψ_{mn}) m Punkte im (J, θ) -Phasenraum mit gleichem J und $\theta = \theta_i$ für $i=0, m-1$. Die einzelne *Insel* im (J, Ψ_{mn}) -Raum wird zu einer *Inselkette* von m Inseln gleicher Breite Δ_{mn} im *Surface of Section Plot* (vgl. Skizze 2)



Skizze 2

Diese Diskussion bezog sich nun auf eine spezielle Störung H_1 mit nur einem nichtverschwindenden Mode, für die das Hamiltonsche System 3.2 auch für $\varepsilon \neq 0$ noch integrabel bleibt. KOLMOGOROFF (1954), ARNOLD (1963), MOSER (1962, 1972) haben nun in einer Reihe von grundlegenden Arbeiten qualitativ den Fall eines H_1 mit mehr als einer Mode untersucht. So besagt das *KAM-Theorem*, daß ungestörte Bahnen zwischen zwei Resonanzen unter geeigneten Voraussetzungen zwar im Phasenraum "verbogen" werden, aber topologisch äquivalent zu den trivialen $\varepsilon=0$ Orbits bleiben. D.h., mit $\xi = \omega\tau + \theta_0$ haben die entsprechenden gestörten Bahnen die Darstellung

$$\begin{aligned} J &= J_0 + v(\xi, \varepsilon) \\ \Theta &= \xi + u(\xi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.12)$$

worin u, v 2π -periodisch in ξ und $u, v=0$ für $\varepsilon=0$. Diese Trajektorien liegen im erweiterten (J, Θ, H, τ) Phasenraum auf den sogenannten *KAM-Flächen* (es handelt sich um 2-Tori, daher auch *KAM-Tori*), die invariant unter dem Fluß unseres Hamiltonschen Systems 3.2 sind. Die Schnittgebilde der KAM-Flächen mit der durch $\tau=2\pi i$ im (J, Θ, H, τ) -Raum festgelegten Surface of Section, die sogenannten *KAM-Kurven*, sind analog invariant unter der Poincare-Abbildung.

Die oben erwähnten Bedingungen für die Existenz solcher KAM-Flächen sind [vgl. LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983)]:

- (i) Existenz von mindestens M stetigen Ableitungen der Störung H_1 , wobei M von der Anzahl f der Freiheitsgrade abhängt. Für $f=2$ wird $M=3$ als hinreichend erachtet [MOSER (1973)].
- (ii) Lineare Unabhängigkeit der Frequenzen. Es darf also kein (m, n) geben, sodaß für alle J in einer Umgebung des Startwertes gilt $m\omega(J) - n = 0$. Notwendig hierfür ist $\partial^2 H_0 / \partial J^2 \neq 0$, weshalb man von einer Bedingung hinreichender Nichtlinearität sprechen kann.
- (iii) Die Anfangsbedingung J_0 (der ungestörten Bahn, die die KAM-Fläche bildet) muß hinreichend weit von einer Resonanz entfernt sein, d.h.,

$$|m\omega(J_0) - n| \geq \gamma \frac{1}{|m+n|^\ell} \quad (3.13)$$

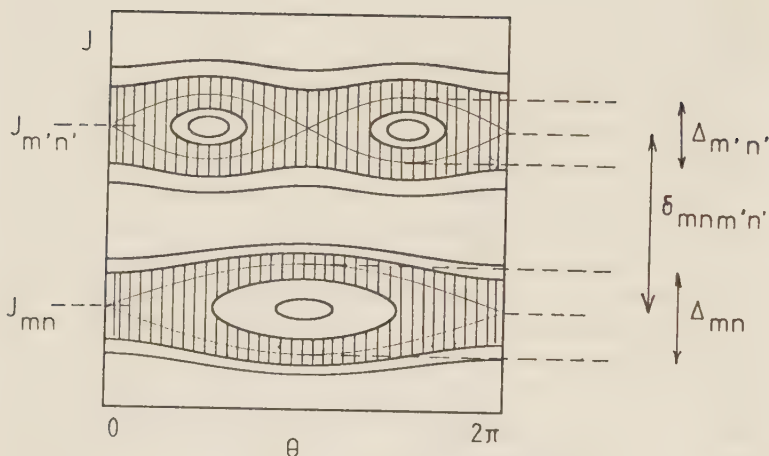
für alle (r, s) und mit $\ell > 1$. Da hierin γ mit ε und $|H_1|$ (also mit der Norm der Störung) anwächst und 3.13 für große γ nicht erfüllt werden kann, impliziert 3.13 also gleichzeitig die Forderung nach einer hinreichend kleinen Störung.

Die letzte Bedingung ist offenbar die kritische, nur sie enthält die Amplitude der Störung. Für kleine ε und somit kleine γ wird 3.13 durch Anfangsbedingungen J_0 mit irrationalem $\omega(J_0)$ leicht

erfüllt. Mit steigendem ε (und damit γ) jedoch können nur solche $\omega(J_0)$, die durch rationale Zahlen q/p schlecht zu approximieren sind, zu KAM-Kurven führen. (iii) fordert also hinreichende Irrationalität der ungestörten Bahn für ihre Erhaltung als KAM-Fläche.

Was passiert nun in der Nähe der Resonanzen? Wie MOSER (1973) ausführlich für *hinreichend kleines ε* beweist, bleibt der durch die Poincare-Abbildung erzeugte Surface of Section Plot in Anwesenheit mehr als einer Mode ähnlich dem für den Fall nur einer Mode diskutierten. Es bleiben von einer rationalen Bahn mit $\omega(J_0)=n/m$ bei einer kleinen Störung wieder m hyperbolische und m elliptische Fixpunkte (der Poincare-Abbildung) übrig, wovon letztere im Zentrum von Inseln (quasi-)periodischer Orbits mit Phasenoszillationen liegen. Verschwunden allerdings sind die die hyperbolischen Fixpunkte verbindenden Separatrizen. Diese sind vielmehr ersetzt durch dünne *stochastische Schichten*, die die im Fall einer Mode zu erwartende Separatrix umgeben und in denen Orbits mit quasistochastischem Verhalten zu finden sind. Der Begriff *quasistochastisch* ist dabei in folgendem Sinne zu verstehen: Es sei eine Zufallsfolge gegeben und eine Abbildung, die den Elementen, aus denen diese Zufallsfolge gebildet ist, Eigenschaften der Bewegung des betrachteten Systems zuordnet. Für ein zeitlich periodisch gestörtes Pendel z.B. könnte man eine Folge von 0en und 1en wählen, wobei die 0 einem Durchgang durch die stabile Ruhelage im Uhrzeigersinn, die 1 einem solchen gegen den Uhrzeigersinn entspräche. Dann läßt sich in den stochastischen Schichten eine Anfangsbedingung finden, sodaß die von dem System beschriebene Bahn der Zufallsfolge entspricht. Darüber hinaus liegt hier eine sensitive Abhängigkeit der Trajektorie von den Anfangsbedingungen vor, was sich in einem exponentiellen Divergieren von Bahnen mit eng benachbarten Startpunkten ausdrückt.

Damit sind also im Poincare-Plot des Systems 3.2 für hinreichend kleine ε im allgemeinen die von stochastischen Schichten eingehüllten Inselketten getrennt durch KAM-Kurven regulärer Bewegung:



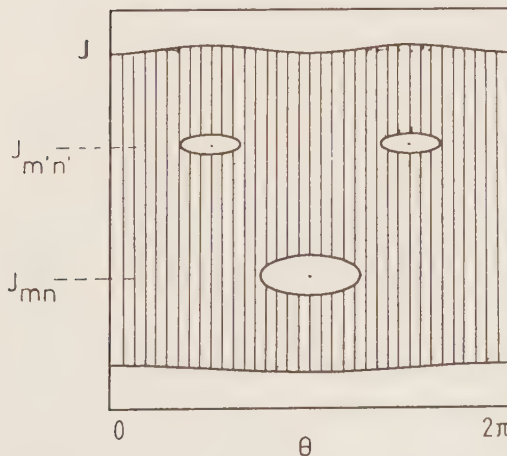
Skizze 3

In Skizze 3 ist diese Situation noch einmal für 2 benachbarte Resonanzen dargestellt. Δ_{mn} bezeichnet die Breite der Separatrix der Inselkette, σ_{mn} die Dicke der stochastischen Schicht und $\delta_{m',n',mn}$ den Abstand zweier benachbarter Resonanzen (m,n) und (m',n') .

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, daß d-s Verhalten nahezu integrierbarer Systeme selbst in zwei Freiheitsgraden noch weitaus komplexer ist, als das einprägsame Bild in Skizze 3 vermuten läßt. Wie wir gesehen haben, führt die Resonanz $m\omega(J)-n=0$ zwischen der ungestörten Bewegung und der Frequenz der Störung zum Auftreten von (primären) Inselketten im Surface of Section Plot. Analog kann man zeigen, daß Resonanzen zwischen der ungestörten Bewegung und der Frequenz der Phasenoszillationen in der Umgebung elliptischer Fixpunkte innerhalb der Inseln sekundäre Inselketten entstehen läßt. Die wiederum sind von stochastischen Schichten umgeben und durch KAM-Flächen regulärer Bewegung getrennt. Dieser Prozeß setzt sich ad infinitum fort, sodaß sich ein Bild selbstähnlicher Strukturen ergibt [LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983)]. Allerdings ist die Breite dieser sekundären Inselketten (und erst

recht die der Inseln höherer Ordnung) für kleine ε so klein, daß ihre Existenz für praktische Zwecke keine Rolle spielt [LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983)].

Während diese Aussagen für hinreichend kleine ε in Strenge beweisbar sind, ist der Bereich größerer ε bisher nur numerischer Analyse zugänglich. Solche Untersuchungen [vgl. die Reviewartikel von CHIRIKOV (1979) UND ESCANDE (1985)] zeigen im wesentlichen ein Anwachsen sowohl der Breite Δ_{mn} der Inseln als auch der Dicke σ_{mn} der stochastischen Schichten mit zunehmendem ε . Gleichzeitig werden die KAM-Bereiche zwischen den Inselketten kleiner, es werden also mehr und mehr KAM-Flächen zerstört. Bei einem gewissen kritischen ε_{krit} schließlich wird zwischen zwei benachbarten Resonanzen J_{mn} und $J_{m',n'}$, die letzte KAM-Fläche zerstört, womit in diesem Bereich des Phasenraums somit das *Regime globaler Stochastizität* erreicht ist. Der Poincare-Plot des Systems 3.2 hat dann typischerweise eine Form wie in Skizze 4 dargestellt.



Skizze 4

Ein Teilchen kann nun unabhängig von seiner Anfangsposition

quasistochastisch in dem gesamten global stochastischen Gebiet umherwandern, mit Ausnahme kleiner Bereiche regulärer Bewegung, die als Rudimente der Inselketten zunächst übrigbleiben und die mit weiter wachsendem ε rasch verschwinden. Während also für hinreichend kleine ε die Bewegung eines Teilchens im Phasenraum auf Zonen beschränkt ist, die ungefähr die Breite der Separatrix haben, kann es für $\varepsilon > \varepsilon_{krit}$ Wirkungen J erreichen, die sich von dem Anfangswert J_0 um mehr als das bei regulärer Bewegung zu erwartende $\Delta J \sim \varepsilon^{1/2}$ unterscheiden. Es ist klar, daß mit Hinblick auf eine möglichst effektive Beschleunigung von Teilchen in unserem Modellproblem 2.6 insbesondere dieses Regime globaler Stochastizität von Interesse sein wird.

Die Teilchenbewegung in solchen global stochastischen Gebieten wird nun in einer Reihe von Arbeiten sorgfältig untersucht. Eine ausführliche Literaturübersicht findet sich bei LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983), verwiesen sei auch auf den Review von ESCANDE (1985) sowie auf MACKAY et al. (1984) und MEISS & OTT (1986). Als wesentliches Ergebnis dieser Untersuchungen ist die Bewegung der Partikel im Wirkungsraum vergleichbar mit einem Diffusionsprozeß. Sei hierzu $f(J, \theta, \tau)$ die Verteilungsfunktion eines Ensembles im Phasenraum, die der Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \left\{ f, H \right\} = 0 \quad (3.14)$$

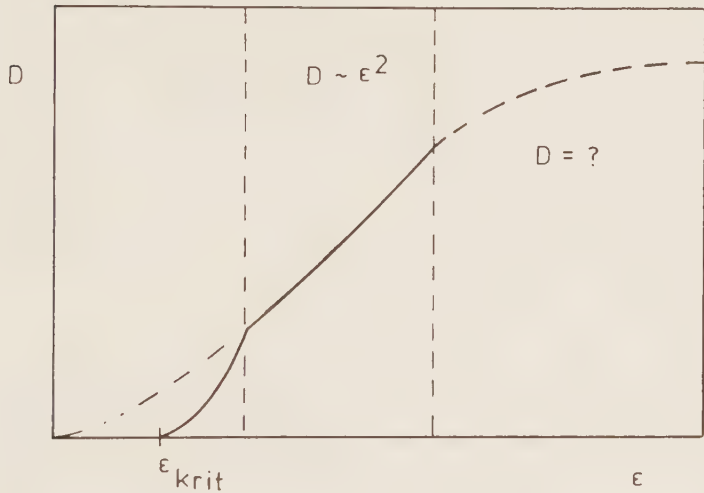
genügt. Dann bedeutet die Sprechweise von der *Diffusion im Wirkungsraum*, daß die über die Winkelvariable gemittelte Verteilung f_0

$$f_0(J, \tau) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L d\theta f(J, \theta, \tau) =: \langle f(J, \theta, \tau) \rangle \quad (3.15)$$

in guter Näherung einer Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial J} \left[D(J) \frac{\partial f_0}{\partial J} \right] \quad (3.16)$$

mit einem Diffusionskoeffizienten $D(J)$ genügt. $D(J)$ wird außer von J von ε abhängen und zwar in folgender Weise [nach ESCANDE (1985); die dort gezeigte Skizze bezieht sich zwar auf die Standardabbildung, ein ähnliches Verhalten ist aber auch für andere Hamiltonsche Systeme zu erwarten.]:



Skizze 5

Globale Stochastizität und damit diffusives Verhalten setzt ein bei $\varepsilon \approx \varepsilon_{krit}$. Allerdings wird der letzte KAM-Torus bei Erreichen dieses Grenzwertes nicht schlagartig zerstört, sondern er bricht auf in einen Cantorus, der mit kleinen Löchern durchsetzt ist, die eine Cantormenge bilden [MACKAY et al. (1984)]. Mit zunehmendem ε werden diese schnell größer, was eine entsprechende Zunahme des chaotischen Transports bewirkt. Schließlich sind auch die Cantori verschwunden, und unser System zeigt quasilineare Diffusion. In diesem Parameterbereich ist die Amplitude der Störung noch so klein, daß die Teilchenbahnen auf Zeitskalen von der Größenordnung der Lagrangeschen Autokorrelationszeit τ_c ,

$$\tau_c = \frac{1}{\langle \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 \rangle} \cdot \int_0^\infty dt \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}(J_0, \theta_0, t_0) \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta}(J(t), \theta(t), t) \right), \quad (3.17)$$

in guter Näherung durch die ungestörten Bahnen beschrieben werden können. Dies führt, wie in Kap.4 ausführlich diskutiert, zu $D \sim \epsilon^2$. Für große ϵ ist die Annahme ungestörter Orbits schließlich nicht mehr gerechtfertigt. Die genaue Grenze des Gültigkeitsbereichs quasilinearer Theorie ist daher Gegenstand numerischer Untersuchungen gewesen [DOVEIL & GRESILLION (1982), ISHIHARA & HIROSE (1984)], die im Fall großer Störamplituden eine Reduzierung des Diffusionskoeffizienten gegenüber dem quasilinearen finden. Es gibt jedoch auch Vermutungen [vgl. ESCANDE (1985)], daß in diesem Parameterbereich eine Beschreibung der Teilchenbewegung durch eine Diffusion im Wirkungsraum nicht mehr angemessen ist.

Ein Hamiltonsches System 3.2 zeigt also typischerweise mit wachsendem ϵ einen Übergang von integrierbarer Bewegung bei $\epsilon=0$ zu global stochastischem Verhalten. Letzteres ist verknüpft mit einer Diffusion der Teilchenbahnen im Wirkungsraum, und tritt in jenen Teilen des Phasenraums auf, in denen die KAM-Flächen zwischen benachbarten Resonanzen zerstört sind. Die Frage, bei welchem ϵ_{krit} die letzte KAM-Fläche zwischen Nachbarresonanzen (m,n) und (m',n') verschwindet, steht daher im Mittelpunkt der Untersuchung nahezu integrierbarer Hamiltonscher Systeme. Die meisten Methoden, die entwickelt worden sind, um ϵ_{krit} abzuschätzen, erfordern jedoch im allgemeinen aufwendige numerische Rechnungen. Hierzu zählen die Renormalisierungsverfahren, die Gebrauch von der selbstähnlichen Struktur Hamiltonscher Bewegung machen [ESCANDE & DOVEIL (1981), ESCANDE (1985)], ebenso wie diejenigen Verfahren, die die Stabilität von Fixpunkten höherer Ordnung [GREENE (1979)] oder die Fourierdarstellung von KAM-Flächen [LICHTENBERG & LIEBERMANN (1983), PERCIVAL (1979)] untersuchen. In der vorliegenden Arbeit wird dagegen das analytisch einfach zu handhabende Kriterium von ZASLAVSKII & CHIRIKOV (1972) verwendet werden. Gemäß diesem sogenannten *Overlap-Kriterium* verschwindet die letzte KAM-Fläche

zwischen zwei Resonanzen (m,n) und (m',n') spätestens dann, wenn sich die Separatrizen der entsprechenden Inseln berühren. Mit den Bezeichnungen der Skizze 3 ist dies der Fall, wenn

$$\frac{1}{2} \cdot (\Delta_{mn} + \Delta_{m',n'}) \geq \Gamma \cdot \delta_{mnm',n'} \quad (3.18)$$

Hierin bezeichnet Γ einen *stochastischen Faktor*, $\Gamma \leq 1$. Γ berücksichtigt, daß -wegen der stochastischen Schichten, die die Separatrizen ersetzen- die letzte KAM-Kurve verschwindet, bevor die Inseln überlappen. Sorgfältige Studien für die sogenannte Standardabbildung

$$H_{\#} = \frac{J^2}{2} - \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos(\theta - nt) \quad (3.19)$$

haben $\Gamma \approx 2/\pi$ [GREENE (1979), LICHTENBERG (1980)] ergeben, jedoch gibt es Hinweise [ELSÄSSER, DÜCHS & SACK (1987)], daß Γ schwach von dem betrachteten System abhängt. Unter der Annahme, daß benachbarte Inseln von gleicher Größenordnung sind,

$$\frac{1}{2} \cdot (\Delta_{mn} + \Delta_{m',n'}) \approx \Delta_{mn}$$

ist die einfachste Version des Overlap-Kriteriums

$$\Delta_{mn} \geq \Gamma \cdot \delta_{mnm',n'} \quad (3.20)$$

bzw. mit 3.11 für Δ_{mn}

$$4 \cdot \sqrt{\varepsilon 2 H_{mn} / \omega'} \geq \Gamma \cdot |J_{mn} - J_{m',n'}| \quad (3.21)$$

GREENE (1979,1980) hat nun ebenfalls durch numerische Untersuchung der Standardabbildung 3.19 ein leicht handhabbares Stochastizitätskriterium verifiziert. Das GREENEsche Verfahren

beruht auf der Bedingung des KAM-Theorems, die für den Erhalt einer KAM-Kurve hinreichende Irrationalität fordert. Bereits bei seiner Diskussion war darauf hingewiesen worden, daß für große ε bevorzugt solche Tori erhalten bleiben, deren irrationale Windungszahl $\omega(J_0)$ schlecht durch rationale Zahlen approximiert werden kann. Dieser Gedanke soll nun präzisiert werden. Die beste Art, eine Irrationalzahl α darzustellen, ist ein Kettenbruch

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (3.22)$$

Hierin sind die a_i , $i=1,2,\dots$ natürliche Zahlen und a_0 ist der ganzzahlige Anteil von α . a_1 wird festgelegt durch den ganzzahligen Anteil des Kehrwerts von $\alpha - a_0$, a_2 durch den Kehrwert des Restes usw. ad infinitum. Die Entwicklung ist eindeutig, und die Iterierten α_n der Kettenbruchdarstellung

$$\alpha_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (3.23)$$

konvergieren um so schneller gegen α , je größer die a_i sind. Daher sind die am schlechtesten durch rationale Zahlen darzustellenden irrationalen diejenigen mit $a_i=1$ ab einem n_0 , $i \geq n_0$. Solche Irrationalzahlen werden üblicherweise als *noble* bezeichnet.

In einem gegebenen Streifen $\{(J, \theta) \mid J \in [J_1, J_2], \theta \in [0, 2\pi]\}$ unseres Phasenraums verschwindet damit nach GREENE (1979) diejenige KAM-Kurve als letzte, deren Windungszahl $\omega(J_0)$ die Form $\omega(J_0) = [a_0, \dots, a_{n_0}, 1, 1, \dots]$ mit dem kleinsten n_0 hat. Die letzte zerstörte KAM-Fläche im Wirkungsintervall $[J_1, J_2]$ ist also die mit der nobelsten Windungszahl. Um den entsprechenden Wert von ε zu bestimmen, bei dem sich dieser Übergang zu globaler Stochastizität vollzieht, schließt GREENE (1979) nun eine numerische Prozedur an, die die Stabilität von Fixpunkten hoher Ordnung in der Nähe dieser KAM-Kurve untersucht. Dieses weitere Vorgehen soll aber hier nicht interessieren, wesentlich ist vielmehr ein anderer Aspekt. Nach dem

GREENESchen Kriterium ist es unabhängig vom Spektrum der Störung H_1 , welche KAM-Fläche in einem gegebenen Wirkungsintervall zuletzt zerstört wird. Die spezielle Form von H_1 legt nur die Störamplitude ε fest, bei der dies geschieht. Diese doch recht erstaunliche Aussage steht, wie eine ausführliche Diskussion noch zeigen wird, für das hier betrachtete Modell 2.6 im Widerspruch sowohl zur CHIRIKOVschen Argumentation als auch zu den Ergebnissen numerischer Simulationen. Es liegt daher der Schluß nahe, daß das elementare Overlapkriterium auf eine breitere Klasse von Systemen angewendet werden kann.

Wir haben nun qualitativ das generische Verhalten nahezu integrierbarer Hamiltonscher Systeme und deren Übergang zu globaler Stochastizität kennengelernt; die Charakteristika der Teilchenbewegung sind ebenso diskutiert worden wie Kriterien für das Verschwinden der letzten KAM-Fläche zwischen zwei Resonanzen. Damit liegt das Werkzeug aus der Theorie Hamiltonscher Systeme bereit, mit dem wir an die Abschätzung der Wellenspektren gehen können, die im Rahmen unseres Modells aus Kap.2 für Teilchenbeschleunigung optimal sind.

3.2 OPTIMALE SPEKTREN FÜR TEILCHENBESCHLEUNIGUNG

Das in Kap.2 dargestellte Modell wurde für ein System der Länge L beschrieben durch die Hamiltonfunktion (2.6)

$$H = \frac{p^2}{2m_e} - e\varepsilon \cdot \sum_{m>0} \mathcal{E}_{k_m} \cos(k_m x - \omega_{pe} t + \varphi_{k_m}), \quad (2.6)$$

worin bereits die Bewegung von Elektronen betrachtet ist; die entsprechende Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_e \dot{x}^2 + e\varepsilon \cdot \sum_{m>0} \mathcal{E}_{k_m} \cos(k_m x - \omega_{pe} t + \varphi_{k_m}). \quad (3.24)$$

2.6 hat nun offenbar genau die oben diskutierte Struktur 3.1. Mit

den Entsprechungen

$$\begin{aligned} k_m &\equiv \frac{2\pi}{L} \cdot m & \omega_{pe} &\equiv \frac{2\pi}{T} \\ x &\equiv \frac{L}{2\pi} \cdot \theta & t &\equiv \frac{T}{2\pi} \cdot \tau \end{aligned} \quad (3.25)$$

wird nämlich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m_e}{2} \cdot \left(\frac{L}{T} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + e\varepsilon \cdot \sum_{m>0} \varepsilon_{k_m} \cos(m\theta - \tau + \varphi_{k_m}). \quad (3.26)$$

Der zu θ kanonisch konjugierte Impuls J ist dann

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)} = m_e \left(\frac{L}{T} \right)^2 \cdot \frac{d\theta}{d\tau} \quad (3.27)$$

oder

$$J = \frac{L}{T} \cdot p. \quad (3.28)$$

Mit diesen Transformationen nimmt 2.6 die Form

$$H = \frac{T^2}{2m_e L^2} \cdot J^2 - e\varepsilon \cdot \sum_{m>0} \varepsilon_{k_m} \cos(m\theta - \tau + \varphi_{k_m}) \quad (3.29)$$

an, was mit

$$H_0(J) = \frac{T^2}{2m_e L^2} \cdot J^2 \quad (3.30a)$$

und

$$2H_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \text{sign}(m) \neq \text{sign}(n) \text{ oder } n \neq \pm 1 \\ -e\varepsilon \varepsilon_{|k_m|}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.30b)$$

gerade in 3.1 übergeht.

Die Resonanzbedingung 3.7 im (J, θ) -Raum, $m\omega(J) - n = 0$, geht damit für das System 2.6 in die Bedingung

$$k_m \cdot \frac{p_m}{m} - \omega_{pe} = 0 \iff p_m = \frac{m \omega_{pe}}{k_m} \quad (3.31)$$

für die Resonanzen im (p, x) -Raum über; der Abstand $\delta_{mm'}$, benachbarter Resonanzen m und m' , $m'=m+1$, wird

$$\begin{aligned} \delta_{mm'} &= |p_m - p_{m'}| = \frac{m \omega_{pe} L}{2\pi} \cdot \frac{1}{m(m+1)} \\ &\approx \frac{m \omega_{pe} L}{2\pi} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{2\pi m \omega_{pe}}{L} \cdot \frac{1}{k_m^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

für große m . Die Breite $\Delta_m^{(J)}$ der Inselkette bei der m -ten Resonanz im (J, θ) -Raum ist mit 3.11

$$\Delta_m^{(J)} = 4 \cdot \frac{L}{T} \cdot \sqrt{m e \varepsilon \mathcal{E}_{k_m}}, \quad (3.33)$$

bzw. wegen $J=L/T \cdot p$ im (p, x) -Raum

$$\Delta_m = 4 \cdot \sqrt{m e \varepsilon \mathcal{E}_{k_m}}. \quad (3.34)$$

Das CHIRIKOV-Kriterium 3.20 sagt damit ein Verschwinden der letzten KAM-Fläche zwischen v_m und $v_{m'}$, vorher, falls

$$\Delta_m \geq \Gamma \cdot |p_m - p_{m'}|$$

ist, bzw.

$$\frac{4}{\Gamma} \cdot \sqrt{m e \varepsilon \mathcal{E}_{k_m}} \geq \frac{2\pi m \omega_{pe}}{L} \cdot \frac{1}{k_m^2}. \quad (3.35)$$

Von besonderer Bedeutung wird im folgenden dasjenige Spektrum $\mathcal{E}_{k_m}^c$ sein, für das alle Resonanzen bei der gleichen Störamplitude ε gerade marginal mit ihren nächsten Nachbarn überlappen. Dies ist

mit 3.35 der Fall, wenn

$$\frac{4}{\Gamma} \cdot \sqrt{m_e e \varepsilon \mathcal{E}_{k_m}} \approx \min(|p_m - p_{m+1}|, |p_m - p_{m-1}|) \quad (3.36)$$

für alle m . Diese Bedingung definiert ein kritisches Spektrum $\mathcal{E}_{k_m}^c$ und eine Stör-Amplitude ε^* gemäß

$$\varepsilon^* \mathcal{E}_{k_m}^c = \frac{\Gamma^2}{16} \cdot \Phi_0 \left(\frac{k_1}{k_m} \right)^4, \quad (3.37)$$

worin

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{m_e}{e} \cdot \omega_{pe}^2 L^2.$$

$\mathcal{E}_{k_m}^c$ hat also die Form eines Potenzspektrums $\mathcal{E}_{k_m}^\eta = \Phi_0 (k_1/k_m)^\eta$ mit $\eta=4$, und globale Stochastizität tritt auf für $\varepsilon = \varepsilon^* = \Gamma^2/16$.

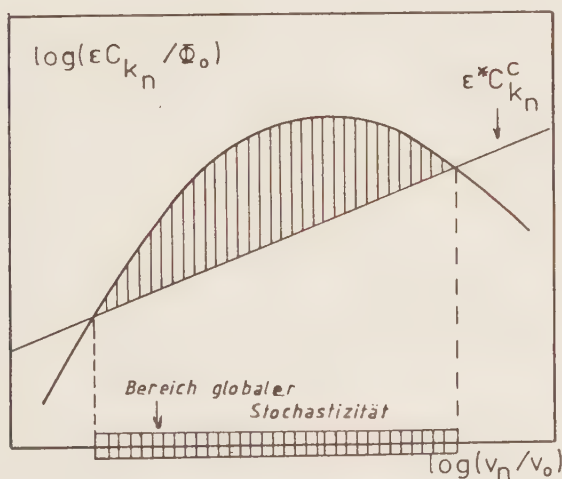
Diskutieren wir nun qualitativ die Teilchenbewegung im Hamiltonschen System 2.6. Es sei dazu die Störung H_1 zunächst als die durch das kritische Spektrum gegebene angenommen. Für $\varepsilon < \varepsilon^*$ trennen dann KAM-Flächen alle Resonanzen, d.h., ein Teilchen kann seine Anfangsgeschwindigkeit v_0 um höchstens $\Delta v \sim \varepsilon^{1/2}$ verändern. Eine nennenswerte Beschleunigung ist daher nicht zu erwarten. Wird nun $\varepsilon \approx \varepsilon^*$, so tritt sozusagen schlagartig zwischen allen Resonanzen global stochastisches Verhalten auf. Damit können die Teilchen im Rahmen ihrer quasistochastischen Bewegung im Phasenraum zu großen Geschwindigkeiten gelangen, die sich von v_0 um mehr als das bei regulärer Bewegung zu erwartende $\Delta v \sim \varepsilon^{1/2}$ unterscheiden, sodaß man sinnvoll von einer stochastischen Beschleunigung sprechen kann. Die maximale, so erreichbare Geschwindigkeit wird im Rahmen unseres Modells nur durch die größte vorhandene Resonanz $v^{\max}$ bzw. die kleinste auftretende Wellenzahl $k_m^{\min} \geq k_1$ beschränkt, $v^{\max} = \omega_{pe} / k_m^{\min}$.

Im allgemeinen wird natürlich $\mathcal{E}_{k_m} \neq \mathcal{E}_{k_m}^c$ sein. Wegen der Definition 3.36 des kritischen Spektrums überlappen gerade

diejenigen Resonanzen m zumindest mit ihrem nächsten Nachbarn, für die

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_{k_m} > \varepsilon^* \cdot \varepsilon_{k_m}^c \quad (3.38)$$

gilt. Nur in der Umgebung jener v_m im Phasenraum ist also globale Stochastizität und damit stochastische Beschleunigung zu erwarten, wie in Skizze 6 dargestellt. Hier ist ε_{k_m} wegen $k_m = \omega_{pe}/v_m$ als Funktion der resonanten Geschwindigkeiten v_m betrachtet, $\varepsilon_{k_m}^c = \Phi_0 (v_m/v_0)^4$ mit $v_0 = \omega_{pe}/k_1 = \omega_{pe} L/2\pi = (L/2\pi\lambda_D) v_{th}$.



Skizze 6

Es gibt nun (vgl. Kap.2) Indizien dafür, daß turbulente Langmuirwellen in Teilen des Wellenzahlbereichs Potenzspektren

$$\varepsilon_{k_m}^\eta = \Phi_0 \left(\frac{k_1}{k_m} \right)^\eta \quad (3.39)$$

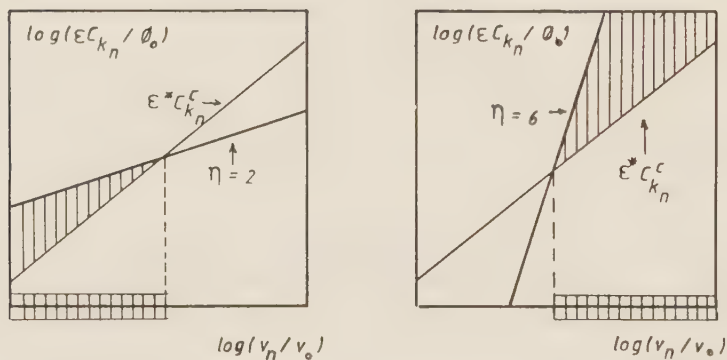
(also ein " η -Spektrum") aufweisen. Die Bedingung 3.38, $\varepsilon \mathcal{E}_{k_m}^* > \varepsilon^* \mathcal{E}_{k_m}^c$, ist bei gegebener Stör-Amplitude ε für solche η -Spektren erfüllt für alle Resonanzen m mit

$$v_m > v_\eta := v_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^{1/(\eta-4)} \quad , \text{ falls } \eta > 4 \quad (3.40)$$

bzw.,

$$v_m < v_\eta := v_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^{1/(\eta-4)} \quad , \text{ falls } \eta < 4. \quad (3.41)$$

Eine "steile Störung" ($\eta > 4$) beschleunigt also Teilchen oberhalb einer Grenzggeschwindigkeit v_η bis an den Rand des resonanten Bereichs, während eine "flache Störung" ($\eta < 4$) nur zu einer Beschleunigung bis zu einer Grenze v_η führen kann (vgl. Skizze 7). Damit sollte insbesondere eine Störung mit steilem Spektrum günstig für das Auftreten schneller Elektronen sein, die dann über Sekundärprozesse ihre Energie abgeben und so das Plasma heizen.



Skizze 7

$\mathcal{E}_{k_m}^c$ war durch die Bedingung gleichzeitigen Überlappens benachbarter Resonanzen definiert. Interessanterweise ist dieses mathematisch ausgezeichnete Spektrum auch in einem physikalischen

Sinn optimal für die Beschleunigung von Teilchen in Langmuirwellen. Eine Störung, die in einem gegebenen Geschwindigkeitsintervall $[v_{\min}, v_{\max}]$ stochastische Beschleunigung ermöglichen soll, muß in dem entsprechenden Wellenvektorbereich $[k_{\min} = \omega_{pe}/v_{\max}, k_{\max} = \omega_{pe}/v_{\min}]$ die Bedingung 3.38, $\varepsilon_k^2 > \varepsilon_k^c$, erfüllen. Eine solche Welle hat dann minimal eine mittlere Energiedichte $w_{st} = \langle |E|^2 \rangle / 8\pi$ von

$$w_{st} = \frac{1}{8\pi L} \cdot \int_0^L E^2 dx = \frac{1}{16\pi} \cdot \sum_{k_m > k_{\min}}^{k_m < k_{\max}} \varepsilon_m^2 k_m^2 \varepsilon_m^c \quad (3.42)$$

$$\geq \frac{1}{16\pi} \cdot \sum_{k_m > k_{\min}}^{k_m < k_{\max}} \varepsilon_m^c k_m^2 \varepsilon_m^c =: w_{st}^c$$

Eine Störung mit kritischem Spektrum benötigt also eine geringere Energiedichte w^c als jede andere, um in einem gegebenen Geschwindigkeitsintervall stochastische Beschleunigung zu ermöglichen.

Für ein Potenzspektrum läßt sich w_{st} leicht angeben. Dazu bemerken wir zunächst, daß für $\eta > 4$ globale Stochastizität im Intervall $[v_{\min}, v_{\max}]$ wegen 3.40 $v_{\eta} \leq v_{\min}$, also

$$\varepsilon \geq \varepsilon^* \cdot \left(\frac{v_0}{v_{\min}} \right)^{\eta-4} \quad (\eta > 4) \quad (3.43)$$

erfordert. Analog muß, falls $\eta < 4$ ist, $v_{\eta} > v_{\max}$, also

$$\varepsilon \geq \varepsilon^* \cdot \left(\frac{v_0}{v_{\max}} \right)^{\eta-4} \quad (\eta < 4) \quad (3.44)$$

sein. Nun ist die mittlere Energiedichte eines Potenzspektrums

$$\begin{aligned}
 w_{st} &= \frac{1}{16\pi} \cdot \sum_{k_{min}}^{k_{max}} \varepsilon^2 k_m^2 e^2 k_m \approx \frac{\varepsilon^2 \Phi_0^2 k_1^2 \eta}{16\pi k_1} \cdot \int_{k_{min}}^{k_{max}} dk \cdot k^2 \cdot \frac{1}{k^{2\eta}} \quad (3.45) \\
 &= \frac{\varepsilon^2 \Phi_0^2 k_1^2}{16\pi} \cdot \frac{1}{3-2\eta} \cdot \left\{ \left[\frac{v_{min}}{v_0} \right]^{2\eta-3} - \left[\frac{v_{max}}{v_0} \right]^{2\eta-3} \right\} .
 \end{aligned}$$

Einsetzen des ε aus 3.43 bzw. 3.44 ergibt dann die minimale Energiedichte w_{st}

$$w_{st} \approx \frac{\varepsilon^2 \Phi_0^2 k_1^2}{16\pi} \cdot f(\eta) \quad (3.46)$$

worin

$$f(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{3-2\eta} \left[\frac{v_{max}}{v_0} \right]^5 \left[\left[\frac{v_{min}}{v_{max}} \right]^{2\eta-3} - 1 \right] , & \text{falls } \eta < 4 \\ \frac{1}{2\eta-3} \left[\frac{v_{min}}{v_0} \right]^5 \left[\left[\frac{v_{max}}{v_{min}} \right]^{2\eta-3} - 1 \right] , & \text{falls } \eta > 4 \end{cases} \quad (3.47)$$

Man überzeugt sich mit den üblichen Techniken davon, daß $f(\eta)$ für $\eta < 4$ monoton fällt und für $\eta > 4$ monoton steigt, daß also entsprechend unserer Diskussion w_{st}^η bei $\eta=4$ minimal wird. Um in einem gegebenen Geschwindigkeitsintervall $[v_{min}, v_{max}]$ durch Langmuirturbulenz stochastische Beschleunigung von der Untergrenze v_{min} bis zur Obergrenze v_{max} zu ermöglichen, muß die Energiedichte der Wellen damit mindestens $w_{st}^c = w_{st}^4$, also

$$w_{st}^c = \frac{\varepsilon^2 \Phi_0^2 k_1^2}{16\pi} \cdot \frac{1}{5} \left\{ \left[\frac{v_{max}}{v_0} \right]^5 - \left[\frac{v_{min}}{v_0} \right]^5 \right\} \quad (3.48)$$

$$= \frac{\Gamma^4 \pi^2}{2^9 \cdot 5} \cdot \frac{m_e^2}{e^2} \cdot v_{th}^4 \cdot \lambda_D \cdot \frac{1}{L^3} \cdot \left\{ \left[\frac{v_{max}}{v_{th}} \right]^6 - \left[\frac{v_{min}}{v_{th}} \right]^6 \right\}$$

$$\sim T_e^{5/2} n_e^{-1/2} L^{-3}$$

betragen. Je kälter und dichter das Plasma ist, umso leichter wird also stochastische Beschleunigung auftreten. Die nötige Energiedichte geht für große Systeme mit $L \rightarrow \infty$ wie L^{-3} gegen 0, was sich durch das Zusammenrücken der Moden im Fourierraum mit wachsendem L erklärt. Je größer die Systemlänge wird, desto dichter liegen die Resonanzen im Phasenraum beieinander, und desto eher überlappen benachbarte Inselketten.

Die kritische Energiedichte vergleicht man zweckmäßig mit der des thermischen Rauschens. Es ist

$$\text{Energie des Rauschens} = \frac{1}{2} kT_e \cdot \text{Anzahl der Moden.}$$

Für $\lambda_D \ll L$ und isotrope Wellen ist das Volumen im Fourierraum $4/3\pi(2\pi/\lambda_D)^3$ mit einer mittleren Dichte der Moden von $(L/2\pi)^3$. Daher ist die

$$\text{Anzahl der Moden} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2\pi}{\lambda_D}\right)^3$$

und also die mittlere Energiedichte w_n des Rauschens

$$w_n = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{kT_e}{\lambda_D^3} \quad (3.49)$$

Insgesamt hat man damit

$$\frac{w_{st}}{w_n} = \frac{3\Gamma^4 \pi^2}{160} \cdot (n\lambda_D^3) \cdot \left(\frac{\lambda_D}{L}\right)^3 \cdot \left\{ \left[\frac{v_{max}}{v_{th}} \right]^6 - \left[\frac{v_{min}}{v_{th}} \right]^6 \right\} \quad (3.50)$$

$$\sim T_e^3 n_e^{-2} L^{-3}$$

Betrachten wir zur Illustration dieses Ergebnisses die Verhältnisse in einer Sonnenfackel. BENZ & SMITH (1987) geben eine typische Länge $L \sim 2 \cdot 10^7 \text{ cm}$, $\lambda_D \sim 7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ und $n \sim 5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ an, womit für $v_{\min} \sim 3v_{th}$ und $v_{\max} \sim 100v_{th}$

$$\frac{w_{\bullet l}^c}{w_n} \approx 10^{-10}.$$

Glg.3.50 zeigt, daß in Systemen endlicher Länge Langmuirturbulenz nur dann zur stochastischen Beschleunigung von Teilchen führen kann, wenn ihre mittlere Energiedichte den dort angegebenen Grenzwert übersteigt. Dieser mag -wie das Beispiel der Sonnenfackel deutlich macht- für reale physikalische Situationen leicht überschritten werden, kann jedoch für numerische Simulationen von Bedeutung sein. Analog wie oben erhält man für die kritische Energiedichte in Einheiten der thermischen

$$\frac{\langle |E|^2 \rangle}{4\pi n k T_e} \geq \frac{\Gamma^4 \pi^3}{2^6 \cdot 5} \cdot \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^3 \cdot \left\{ \left[\frac{v_{\max}}{v_{th}} \right]^6 - \left[\frac{v_{\min}}{v_{th}} \right]^6 \right\}, \quad (3.51)$$

woraus sofort die Bedingung

$$\left[\frac{L}{\lambda_D} \right] \geq \left[\frac{\Gamma^4 \pi^3}{2^6 \cdot 5} \cdot \frac{4\pi n k T_e}{\langle |E|^2 \rangle} \cdot \left\{ \left[\frac{v_{\max}}{v_{th}} \right]^6 - \left[\frac{v_{\min}}{v_{th}} \right]^6 \right\} \right]^{+1/3}, \quad (3.52)$$

folgt. D.h., bei einer gegebenen Energiedichte der Wellen kann als Konsequenz der elementaren Chirikovschen Vorstellungen stochastische Beschleunigung nur beobachtet werden, wenn das System hinreichend ausgedehnt ist; je kleiner die Energiedichte ist, desto größer muß die Systemlänge L sein. Soll z.B. die Wirkung einer Welle, deren mittlere Energiedichte 1% der thermischen beträgt,

auf Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen $3v_{th}$ und $10v_{th}$ realistisch simuliert werden, so muß das in der Simulation dargestellte System mindestens $200\lambda_D$ umfassen.

Abschließend sei noch kurz der Fall der Teilchenbeschleunigung in lower-hybrid Turbulenz diskutiert, für den unser Modell mit der Ersetzung $kx - \omega_{pe} t \equiv k_{\parallel} x - \omega_{LH} t$ (vgl. Kap.2.3) ebenfalls angemessen ist. Die Diskussion verläuft dann wie bisher mit dem Unterschied, daß $E(x,t)$ den Anteil des elektrischen Feldes parallel zum Magnetfeld beschreibt und L der typischen Ausdehnung des Systems in dessen Richtung entspricht. In obiger Ableitung wird damit

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{m_e}{e} \cdot \omega_{LH}^2 L^2 = \left(\frac{\omega_{LH}}{\omega_{pe}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{m_e}{e} \cdot \omega_{pe}^2 L^2$$

und

$$v_0 = \frac{\omega_{LH} L}{2\pi} = \left(\frac{\omega_{LH}}{\omega_{pe}} \right) \cdot \left(\frac{L}{\lambda_D} \right) v_{th},$$

sodaß die kritische Energiedichte w_{st}^c für lower-hybrid Turbulenz um einen Faktor $(\omega_{pe}/\omega_{LH})^3$ größer ist als für Langmuir-Turbulenz. Dies ist für das betrachtete System unkritisch (obwohl $(\omega_{pe}/\omega_{LH}) \approx 10^2$), kann in einem weniger ausgedehnten System mit kleinerem L und daher (vgl. 3.48) größerem w_{st}^c die Bedeutung der lower-hybrid Wellen aber einschränken.

Mittels einer sorgfältigen Auswertung des Chirikov-Kriteriums waren wir nun in der Lage abzuschätzen, welche Spektren für Teilchenbeschleunigung in elektrischen Wellen optimal sind, und eine Untergrenze für die nötige Energiedichte anzugeben. Wesentlich für diese Ergebnisse waren die Vorhersagen 3.40 bzw. 3.41 der Overlap-Argumentation über die Ausdehnung globaler Stochastizität im Phasenraum. Diese sollen im folgenden daher an hand einer numerischen Repräsentation des Modells 2.6 überprüft werden.

3.3 DISKUSSION NUMERISCHER ERGEBNISSE

Wir werden hier im wesentlichen die Hamiltonschen Gleichungen unseres durch 2.6 beschriebenen Systems,

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{dt} &= \frac{p_m}{m} \\ \frac{dp_m}{dt} &= -e\epsilon \cdot \sum_{m>0} k_m \epsilon_{k_m} \sin(k_m x - \omega_{pe} t + \varphi_{k_m}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit einem Potenzspektrum $\epsilon_{k_m} = \Phi_0 (k_1/k_m)^\eta$ für ein Ensemble von Teilchen lösen. Dazu ist es zweckmäßig, x durch $L/2\pi$, t durch ω_{pe}^{-1} , v durch $v_0 = \omega_{pe} L/2\pi$, Φ durch $\Phi_0 = m_e \omega_{pe}^2 L^2/4\pi^2 e$ und E durch $2\pi\Phi_0/L$ zu normieren. Dann erhalten die Glgen. 3.53 die Form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\epsilon \cdot \sum_{m>0} m \Phi_m \sin(mx - t + \varphi_m) \end{aligned} \quad (3.54)$$

mit $\Phi_m = 1/m^\eta$, die sich von einer Hamiltonfunktion H

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \epsilon \cdot \sum_{m>0} \Phi_m \cos(mx - t + \varphi_m) \quad (3.55)$$

ableitet. In einer numerischen Implementation von 3.54 können nur endlich viele Moden berücksichtigt werden, es sei daher $\Phi_m \neq 0$ nur für $m=10..22$. Die Wahl von Moden mit relativ hoher Wellenzahl m stellt wegen $\Delta_m \sim m^{-\eta/2}$ eine vergleichbare Breite benachbarter Moden sicher, die ja auch in der analytischen Diskussion vorausgesetzt wurde. Würden wir bei $m=1$ beginnen, so wäre für $\eta=4$ $\Delta_2/\Delta_1=1/4$, was die Anwendung der nicht vereinfachten Version 3.18 des Overlap-Kriteriums erforderte. Ferner sei für die spezielle Realisierung des Modells $\varphi_m = \pi$ gesetzt, sodaß

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \epsilon \cdot \sum_{m=10}^{22} \left[\frac{1}{m^\eta} \right] \cdot \cos(mx - t) \quad (3.56)$$

bzw.

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (3.57)$$

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon \cdot \sum_{m=10}^{22} \left[\frac{1}{m} \eta_{-1} \right] \cdot \sin(mx-t)$$

Die durch $mv_m - 1 = 0$ festgelegten Resonanzen liegen dann bei

$$v_m = \frac{1}{m}, \quad m = 10..22 \quad (3.58)$$

Man mag nun argwöhnen, daß die Beschränkung auf wenige nicht verschwindende Moden die Ergebnisse unserer Rechnungen wesentlich beeinflußt. Dies ist als Konsequenz der Vorstellungen über das Verhalten Hamiltonscher Systeme jedoch nur für große ε der Fall. Ein Teilchen "sieht" demzufolge im wesentlichen die Fourierkomponente der Störung, innerhalb deren Resonanzbreite es sich befindet. Denn für hinreichend kleine ε wird die Bewegung eines Partikels der Geschwindigkeit v hauptsächlich durch die benachbarten Resonanzen, d.h. durch diejenigen Moden m und $m'=m+1$ mit $v_m > v > v_{m'}$, bestimmt. Gemäß der Vorstellungen von ZASLAVSKII & CHIRIKOV ist ε als hinreichend klein anzusehen, wenn die halbe Breite einer Insel den Abstand zu ihrem nächsten Nachbarn nicht wesentlich übersteigt, d.h. wenn

$$\frac{1}{2} \Delta_m \leq \min(|p_m - p_{m+1}|, |p_m - p_{m-1}|). \quad (3.59)$$

Andernfalls sieht ein Teilchen mehr als eine Resonanz. Umgekehrt wird für große ε schließlich die Breite Δ_m der Resonanzen von der Größenordnung der Ausdehnung des resonanten Intervalls $[p_{min}, p_{max}]$ sein,

$$\Delta_m \geq O(|p_{max} - p_{min}|). \quad (3.60)$$

Im Fall von 3.60 erwartet man also, daß alle Resonanzen gleichermaßen zur Teilchenbewegung beitragen, unabhängig von der Position des Partikels in $[p_{min}, p_{max}]$. Hinzufügen weiterer Moden am Rand des stochastischen Bereichs wird daher die Bewegung in seinem

Inneren wesentlich beeinflussen, weswegen ein Modell mit wenigen Moden vermutlich wenig wertvoll für die Simulation Hamiltonscher Systeme des Typs 2.6 mit großen Störampplituden ist. Bei ε -Werten in der durch 3.59 festgelegten Größenordnung dagegen wird ein solches Ergänzen von Moden am Rand von $[p_{\min}, p_{\max}]$ die Trajektorie im Innern wenig verändern. *Daher ist, solange*

$$\frac{1}{2}\Delta_m \sim O(\min(|p_m - p_{m+1}|, |p_m - p_{m-1}|))$$

und

$$\Delta_m < O(|p_{\max} - p_{\min}|)$$

erfüllt ist, ein Modell mit wenigen Fourierkomponenten zur Simulation des allgemeinen Systems 2.6 geeignet.

Veranschaulichen läßt sich diese Situation sehr gut an hand einer Darstellung des Spektrums im Geschwindigkeitsraum, in der die Amplitude Φ_m des m -ten Fouriermodes gegen seine Phasengeschwindigkeit v_m aufgetragen ist. In einem Overlap-Diagramm [FUCHS et al. (1985)] werden dann an den Punkten (v_m, Φ_m) horizontale Balken eingetragen, die die Breite der Separatrix der entsprechenden Resonanzen anzeigen. In Abb.1 erkennt man deutlich das marginale Überlappen benachbarter Resonanzen für das kritische Spektrum mit $\varepsilon = \varepsilon^*$ und den geringen Einfluß der Randmoden, während deren Bedeutung für große Störampplituden ε in Abb.2 augenfällig wird.

Die Diskussion aus Kap.3.2 sagt nun für das System 3.56 mit dem kritischen Spektrum $\eta=4$ bei $\varepsilon = \varepsilon^* = \Gamma^2/16$ marginales Überlappen aller benachbarten Resonanzen voraus. Um diese Aussage zu überprüfen, wurde wie folgt vorgegangen. Für die Ensemble mit Verteilungsfunktionen

$$f_i \sim \sum_{j=1}^K \delta(v - v_i) \delta(x - x_{i,j}), \quad i=0 \dots 12, \quad (3.61)$$

wo $v_i = 1/(m_0 + i)$, $m_0 = 10$, $K=100$ und $x_{i,j}$ gleichverteilt aus $[0, 2\pi]$, wurden die Trajektorien der Partikel durch Integration der Glgen.

3.57 mittels eines Leapfrogverfahrens (vgl. Anhang A) verfolgt. In Abb.3a sind nun die Positionen der Ensemble-Mitglieder im (x,v) -Raum für $\eta=4$ und $\varepsilon=0.033$ zu einer Zeit T dargestellt, die groß gegen die typische Bounceperiode ω_B^{-1} ist. Letztere ist als die Zeitskala anzusehen, auf der ein Teilchen -falls keine den Phasenraum separierenden KAM-Flächen mehr existieren- von einer Resonanz zur nächsten wechseln kann. Abb.3a zeigt offenbar genau das Verhalten, das man für eine Störung mit kritischem Spektrum und $\varepsilon < \varepsilon^*$ erwarten kann. Globale Stochastizität tritt nicht auf, die einzelnen Resonanzen bleiben durch Bereiche regulärer Bewegung getrennt. In diese Zonen gelangt kein Teilchen, und insbesondere können sich die Partikel benachbarter Resonanzen nicht mischen. Abb.3b stellt die gemittelten Verteilungsfunktionen $f_{0i}(v,t)$,

$$f_{0i}(v,t) \sim \int f_i(x,v,t) dx$$

als Histogramm in einem gemeinsamen Diagramm dar. Die Separation der Resonanzen durch teilchenfreie Zonen wird hier noch einmal besonders deutlich. Für $\eta=4$ und $\varepsilon=0.063$ zeigen die Abbgen.4a,b dagegen global stochastisches Verhalten der Bahnen im gesamten resonanten Gebiet $[v_{min}=1/22, v_{max}=1/10]$, d.h. Teilchen werden zwischen den Resonanzen ausgetauscht und die teilchenfreien Zonen sind verschwunden. Das kritische ε^* liegt damit zwischen

$$0.03 < \varepsilon^* < 0.063 ,$$

was einem stochastischen Faktor

$$\Gamma^2 \approx 0.5 \dots 1.0$$

entspricht.

Mit analogem Vorgehen lassen sich schließlich die quantitativen Aussagen 3.40 bzw. 3.41 über die Ausdehnung des stochastischen Gebiets für steile bzw. flache Potenzspektren prüfen. Abbgen.5a,b zeigen für $\varepsilon=0.00018$ und $\eta=2$ globale Stochastizität im Bereich

$$v \leq v_{14} \approx 0.071,$$

was für $\Gamma^2 \approx 0.56$ der Vorhersage 3.41 ($v \leq v_{\eta} \approx 0.072$) entspricht. Entsprechend tritt bei $\varepsilon=8$ und $\eta=6$ global stochastisches Verhalten auf für (vgl. Abbgen. 6a, b)

$$v \geq v_{16} \approx 0.066,$$

was ebenfalls mit $\Gamma^2 \approx 0.56$ in Übereinstimmung mit 3.40, $v \geq v_{\eta} \approx 0.067$, ist. *Die Vorhersagen der Theorie Hamiltonscher Systeme werden also für einen stochastischen Faktor*

$$\Gamma \approx 0.75$$

durch das numerische Experiment bestätigt. Es mag bei dieser Diskussion aufgefallen sein, daß die Untersuchung der $\eta=2$ bzw. $\eta=6$ Spektren eine genauere Bestimmung des stochastischen Faktors ermöglicht als die des kritischen $\eta=4$ Spektrums. Bei letzterem ist nämlich entweder globale Stochastizität oder reguläres Verhalten jeweils im gesamten Phasenraum zu beobachten; eine exaktere Bestimmung des kritischen ε^* erfordert also die Durchführung mehrerer Läufe mit unterschiedlichen ε , um ε^* einzugrenzen. Für die anderen Spektren dagegen kann man ε^* gemäß

$$\varepsilon^* \approx \left[\frac{v_{\eta}^{(\text{exp})}}{v_0} \right]^{\eta-4} \cdot \varepsilon \quad (3.62)$$

aus der den numerischen Ergebnissen entnommenen Lage $v_{\eta}^{(\text{exp})}$ der Grenze zwischen global stochastischem und regulärem Verhalten ermitteln.

Zum Abschluß der Diskussion dieser Ergebnisse sei noch einmal kurz das GREENESche Kriterium betrachtet, das in 3.1 bereits dargestellt worden war. GREENES Argumentation läuft darauf hinaus, daß in einem gegebenen Geschwindigkeitsintervall diejenige KAM-Kurve mit der irrationalsten ungestörten Geschwindigkeit (eigentlich Windungszahl, aber hier gilt ja $\omega(J) \approx v$) zuletzt

verschwindet. Wir haben hier $v_{\min} = 1/22$ und $v_{\max} = 1/10$, sodaß die nobelste Irrationalzahl in diesem Intervall offenbar $\alpha_{10} = [0, 10, 1, 1, \dots] \approx 0.09418\dots$ ist, gefolgt von $\alpha_{11} = [0, 11, 1, 1, \dots] \approx 0.08607\dots$ usw.. Das heißt, gemäß GREENE sollte η -global stochastisches Verhalten zunächst am unteren Rand des Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ auftreten, was offenbar im Widerspruch zu den oben dargestellten Resultaten für Störungen mit steilem Spektrum steht. Damit rechtfertigt sich die Bemerkung aus Kap.3.1, daß das CHIRIKOVsche Verfahren einen breiteren Anwendungsbereich als die GREENEsche Methode aufweist.

4. STOCHASTISCHE BESCHLEUNIGUNG IN POTENZSPEKTREN

Die vorstehende Diskussion hat gezeigt, daß Wellen, deren Potential Φ durch ein Potenzspektrum $|\Phi_k| \sim 1/k^\eta$ mit $\eta=4$ gegeben ist, eine geringere Energiedichte als andere erfordern, um in einem gegebenen Geschwindigkeitsintervall stochastische Beschleunigung zu ermöglichen. Da solche η -Spektren weiterhin im Zusammenhang mit der turbulenten Anregung von Wellen auch in konkreten physikalischen Situationen zu erwarten sind (vgl. Kap.2.1), ist es naheliegend, die durch sie verursachte Beschleunigung auch quantitativ zu diskutieren. Bei der Darstellung der Theorie nahezu integrierbarer Hamiltonscher Systeme in Kap.3.1 hatten wir nun bereits gesehen, daß die Teilchenbeschleunigung in global stochastischen Gebieten durch eine Diffusion im Wirkungs-, also hier im Geschwindigkeitsraum beschrieben werden kann. Dabei ist der Diffusionskoeffizient für nicht zu große Amplituden durch die quasilineare Theorie von VEDENOV, VELIKHOV & SAGDEEV (1962) bzw. DRUMMOND & PINES (1962) gegeben, die im folgenden mit Blick auf die stochastische Beschleunigung in vorgegebenen dispersiven Wellen dargestellt und für monochromatische Wellen mit Potenzspektren bezüglich k ausgewertet werden soll.

4.1 GRUNDLAGEN DER QUASILINEAREN THEORIE

Die Liouville-Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Dichte $f(x, v, t)$ eines Ensembles von geladenen Teilchen im (x, v) -Phasenraum unter dem Einfluß einer longitudinalen elektrostatischen Welle E war (Glg. 2.3)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, v, t) + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t) + \frac{q}{m} \cdot E(x, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t) = 0 \quad (4.1)$$

Im Rahmen der quasilinearen Theorie kann dies auf eine Diffusionsgleichung für den räumlichen Mittelwert f_0 von f

$$f_0(v, t) := \frac{1}{L} \int_0^L f(x, v, t) dx =: \langle f \rangle \quad (4.2)$$

reduziert werden. Für ein System endlicher Länge L hat das elektrische Feld die Darstellung

$$E(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_m \exp[i(k_m x - \omega(k_m) t)], \quad (4.3)$$

worin die Realitätsbedingung $\tilde{E}_m \exp[-i\omega(k_m) t] = \tilde{E}_{-k_m}^* \exp[i\omega(-k_m) t]$ für das hier zur Diskussion stehende Modell (vgl. Kap. 2.2) mit

$$\omega(k) = \begin{cases} -\omega_{pe} & , k < 0 \\ 0 & , k = 0 \\ \omega_{pe} & , k > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

auch schon $\tilde{E}_m = \tilde{E}_{-k_m}^*$ erzwingt. Es sei ferner

$$\langle E \rangle = 0 \quad E \approx O(\varepsilon) \quad (4.5)$$

und

$$f(x, v, t) = f_0(v, t) + f_1(x, v, t) \quad , \quad f_1 \approx O(\varepsilon) \\ \langle f_1 \rangle = 0 \quad (4.6)$$

$f(x, v, t)$ hänge also bis auf kleine Schwankungen nicht vom Ort ab.

Mit diesen Näherungen erhält man für f_0 durch Mittelung von 4.1 gemäß 4.2

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \langle E f_1 \rangle \quad (4.7)$$

und für f_1

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_1 = -\frac{q}{m} \cdot E \cdot \frac{\partial}{\partial v} f_0 - \frac{q}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial v} (E f_1 - \langle E f_1 \rangle) . \quad (4.8)$$

In niedrigster Ordnung lassen sich in 4.8 die $E f_1$ -Terme und die Zeitabhängigkeit von f_0 vernachlässigen. Dann können die Glgen. 4.7 und 4.8 mittels einer Fouriertransformation im Ortsraum und einer Laplacetransformation in der Zeit gelöst werden. Es sei also

$$f_{k_m}(v, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f_1(x, v, t) e^{-ik_m x} dx \quad (4.9)$$

und

$$\hat{f}_{k_m}(v, p) = \int_0^\infty f_{k_m}(v, t) e^{-pt} dt, \quad (4.10)$$

worin ein hinreichend großes p , $\text{Re}(p) > 0$, die Konvergenz sichert. Die Rücktransformation erfolgt mittels

$$f_1(x, v, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik_m x} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \hat{f}_{k_m}(v, p) \frac{dp}{2\pi i} . \quad (4.11)$$

Wegen $\tilde{E}_{k_m} = \tilde{E}_{-k_m}^*$ und $\omega(k_m) = -\omega(-k_m) = \text{const}$ ergeben die obigen Transformationen

$$E_{k_m} = \tilde{E}_{k_m} e^{-i\omega(k_m)t} \quad (4.12)$$

und

$$\hat{E}_{k_m}(p) = \int_0^{\infty} \tilde{E}_{k_m} \exp\{(-i\omega(k_m) - p)t\} dt = \frac{\tilde{E}_{k_m}}{i\omega(k_m) + p} \quad (4.13)$$

Aus der Transformierten von Glg. 4.8 für f_1 ,

$$(p + ik_m v) \hat{f}_{k_m} = f_{k_m}(v, t=0) - \frac{q}{m} \cdot \hat{E}_{k_m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}(v). \quad (4.14)$$

bestimmt man, da $f_1(x, v, t=0) = 0$, also $f_{k_m}(v, t=0) = 0$, $\hat{f}_{k_m}$ zu

$$\hat{f}_{k_m} = - \frac{\frac{q}{m} \cdot \hat{E}_{k_m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}(v)}{p + ik_m v} = - \frac{\frac{q}{m} \cdot \tilde{E}_{k_m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}(v)}{(p + i\omega(k_m))(p + ik_m v)} \quad (4.15)$$

Die Umkehrung der Laplace - Transformation

$$f_{k_m}(v, t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \hat{f}_{k_m}(v, p) dp \quad (4.16)$$

liefert somit für $f_{k_m}(v, t)$ für hinreichend große Zeiten $t \rightarrow \infty$ nach geeigneter Wahl des Integrationsweges [vgl. KRALL & TRIVELPIECE (1973)]

$$f_{k_m}(v, t) = \sum_j \text{Res}_j \{ \hat{f}_{k_m}(v, p) \} \cdot \exp(p_j(k_m) t) \quad (4.17)$$

worin die $p_j(k_m)$ die Pole von $\hat{f}_{k_m}$ und die $\text{Res}_j(\hat{f}_{k_m})$ die zugehörigen Residuen

$$\text{Res}_j(\hat{f}_{k_m}) = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \hat{f}_{k_m}(v, p) \quad (4.18)$$

bezeichnen. Mit dem f_{k_m} aus Glg.4.15 bleibt

$$f_{k_m}(v, t) = -\frac{q}{m} \cdot \tilde{E}_{k_m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{-\omega(k_m) + k_m v} \cdot \exp(-i\omega(k_m)t) + \frac{1}{\omega(k_m) - k_m v} \cdot \exp(-ik_m vt) \right\}. \quad (4.19)$$

Damit werten wir nun den treibenden Term $\langle Ef_1 \rangle$ in der Glg.4.7 für $f_0(v, t)$ aus. Beachte zunächst

$$\begin{aligned} \langle Ef_1 \rangle &= \left\langle \sum_m E_{k_m} e^{ik_m x} \cdot \sum_n f_{k_n} e^{ik_n x} \right\rangle \\ &= \sum_m \sum_n E_{k_m} f_{k_n} \langle e^{i(k_m + k_n)x} \rangle \\ &= \sum_m E_{k_m} f_{-k_m}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für E_{k_m} und f_{k_m} unter Berücksichtigung von $\omega(k) = -\omega(-k)$ und $\tilde{E}_{k_m} = \tilde{E}_{-k_m}^*$ ist

$$\begin{aligned} \langle Ef_1 \rangle &= -\frac{q}{m} \cdot \left\{ \sum_m \frac{\tilde{E}_{k_m} \tilde{E}_{k_m}^*}{i(\omega(k_m) - k_m v)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_m \frac{\tilde{E}_{k_m} \tilde{E}_{k_m}^*}{i(\omega(k_m) - k_m v)} \cdot \exp[-i(\omega(k_m) - k_m v)t] \right\} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.21a)$$

An dieser Stelle ist es nun erforderlich, den thermodynamischen Limes durchzuführen, um 4.21a weiter zu vereinfachen. Wir lassen dazu $L \rightarrow \infty$ gehen, halten aber die mittlere Energiedichte $\langle |E|^2 \rangle$ konstant. Diese Forderung definiert eine Spektralfunktion $\mathcal{E}(k)$ durch

$$\langle |E|^2 \rangle = \sum_m |\tilde{E}_{k_m}|^2 \longrightarrow \int dk \, \varepsilon(k) < \infty.$$

Mit den Ersetzungen

$$\sum_m \equiv \frac{L}{2\pi} \cdot \int dk \quad \text{und} \quad k_m \equiv k$$

liest man daraus sofort ab

$$|\tilde{E}_{k_m}|^2 \equiv \frac{2\pi}{L} \cdot \varepsilon(k). \quad (4.21b)$$

Unter Verwendung dieser Spektralfunktion wird dann im Limes $L \longrightarrow \infty$ 4.21a zu

$$\begin{aligned} \langle Ef_1 \rangle = & -\frac{q}{m} \left\{ \int dk \frac{\varepsilon(k)}{i(\omega(k) - kv)} \right. \\ & \left. - \int dk \frac{\varepsilon(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \exp[-i(\omega(k) - kv)t] \right\} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.21c)$$

Die Anwendung der Plemelj-Formel des Residuenkalküls ermöglicht dann die Auswertung der beiden Terme in obigem Ausdruck für $\langle Ef_1 \rangle$. Man erhält zunächst¹

¹ Das Vorzeichen in 4.22 ergibt sich aus der Tatsache, daß die Integration entlang des Landauweges erfolgen muß. Die obige Analysis setzt eigentlich $\omega = \omega_r - i\omega_i$ mit $\omega_i > 0$, also gedämpfte Wellen, voraus; nur dann bleibt nämlich f_1 klein wie oben vorausgesetzt und die k -Integration kann entlang der reellen Achse erfolgen. Der Landauweg ergibt die analytische Fortsetzung des Integrals für $\omega_i \leq 0$.

$$\oint dk \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} = \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk + \frac{\pi}{v} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(k) \cdot \sum_j \delta(k-k_j) dk \quad (4.22)$$

worin die k_j die Pole von $1/(\omega(k)-kv)$, also $k_{1,2} = \mp \omega/v =: \mp k_0$ für $v > 0$ sind. $\oint dk$ bezeichnet den Cauchyschen Hauptwert, der hier die Form

$$\begin{aligned} \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-k_0 - \epsilon} \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk \right. \\ &\quad \left. + \int_{-k_0 + \epsilon}^{+k_0 - \epsilon} \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk + \int_{k_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk \right\} \quad (4.23) \end{aligned}$$

hat. Wegen der Antisymmetrie von $\omega(k)$ und der Hermitizität von E_k ist der Integrand antisymmetrisch, denn

$$\mathcal{E}(-k) = \tilde{E}_{-k} \tilde{E}_{-k}^* = \tilde{E}_{-k} \tilde{E}_{+k} = \tilde{E}_{+k} \tilde{E}_{+k}^* = \mathcal{E}(k) \quad (4.24)$$

und

$$\omega(-k) + kv = -\omega(k) + kv = -(\omega(k) - kv), \quad (4.25)$$

sodaß in 4.23 offenbar $\oint = 0$. Damit verschwindet obiger Hauptwert

$$\oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk = 0, \quad (4.26)$$

und es bleibt

$$\int \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} dk = \frac{2\pi}{v} \cdot \mathcal{E}(k = \frac{\omega}{v}). \quad (4.27)$$

Analog ergibt sich für den zweiten Term im Ausdruck 4.21c für $\langle E f_1 \rangle$

$$\begin{aligned}
 & \int dk \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \exp[-i(\omega(k) - kv)t] \\
 &= \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \exp[-i(\omega(k) - kv)t] dk \\
 &+ \frac{\pi}{v} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(k) \cdot \exp[-i(\omega(k) - kv)t] \cdot \sum_j \delta(k - k_j) dk.
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
 & \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \exp[-i(\omega(k) - kv)t] dk = \\
 & \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \cos[(\omega(k) - kv)t] dk \\
 & - \oint \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega(k) - kv)} \cdot \sin[(\omega(k) - kv)t] dk,
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

worin

$$\oint \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k) - kv)} \cdot \cos[(\omega(k) - kv)t] dk = 0
 \tag{4.30}$$

wegen der Symmetrie von $\mathcal{E}(k)$ und $\cos[(kv - \omega_k)t]$ bzgl. $k=0$. Ferner bleibt wegen der Symmetrie des Integranden

$$\begin{aligned}
 & \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega(k) - kv)} \cdot \sin[(\omega(k) - kv)t] dk \\
 &= 2 \oint_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega(k) - kv)} \cdot \sin[(\omega(k) - kv)t] dk \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega(k) - kv)} \cdot \sin[(\omega(k) - kv)t] dk
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Im letzten Schritt wurde angenommen, daß das uneigentliche Integral existiert und dann auch schon gleich dem Cauchyschen Hauptwert ist. Dies ist für hinreichend schnell fallende $\mathcal{E}(k)$ offenbar der Fall, da mit $\omega(k)=\omega=\text{const.}$ für $k>0$ schon $\int_{k>0} \sin\{(\omega(k)-kv)t\}/(\omega(k)-kv)dk$ existiert. Mit geeigneter Substitution

$$y = (\omega - kv)t \quad , \quad dk = -\frac{1}{v} \cdot dy \quad (4.32)$$

sieht man nun, daß für $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega(k)-kv)} \cdot \sin\{(\omega(k)-kv)t\} dk \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}(k)}{(\omega-kv)} \cdot \sin\{(\omega-kv)t\} dk \\ &= \frac{1}{v} \cdot \int_{-\infty}^{\omega t} \frac{\mathcal{E}\left[\frac{1}{v}\left(\omega-\frac{y}{t}\right)\right]}{y} \cdot \sin(y) dy \\ &\longrightarrow \frac{\mathcal{E}\left(k=\frac{\omega}{v}\right)}{v} \cdot \underbrace{\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy}_{=\pi} \\ &= \frac{\pi}{v} \cdot \mathcal{E}\left(k=\frac{\omega}{v}\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Da weiter wie schon oben

$$\frac{\pi}{v} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(k) \cdot \exp\{-i(\omega(k)-kv)t\} \cdot \sum_j \delta(k-k_j) dk = \frac{2\pi}{v} \cdot \mathcal{E}\left(k=\frac{\omega}{v}\right) \quad (4.34)$$

verschwindet damit der linke Term in 4.28 für $t \rightarrow \infty$,

$$\int dk \frac{\mathcal{E}(k)}{i(\omega(k)-kv)} \cdot \exp\{-i(\omega(k)-kv)t\} \longrightarrow 0 \quad (4.35)$$

sodaß

$$\langle E f_1 \rangle = - 2\pi \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{\varepsilon \left(k = \frac{\omega}{v} \right)}{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (4.36)$$

Die Zeitentwicklung von f_0 kann also mit Glg.4.7 beschrieben werden durch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} (D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v}) \quad (4.37)$$

mit dem geschwindigkeitsabhängigen Diffusionskoeffizienten

$$D(v) = 2\pi \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon \left(k = \frac{\omega}{v} \right)}{v}. \quad (4.38)$$

Die wesentliche Annahme, die zu dieser Gleichung für f_0 führt, ist die Vernachlässigung zeitasymptotisch verschwindender Terme, die in die Glgen.4.19 und 4.35 einging. Dies ist nur gerechtfertigt, wenn die Zeit τ_1 in der diese Anteile abfallen, deutlich kleiner ist als die typische Zeitskala τ_2 , auf der die durch die Glgen.4.37,4.38 beschriebene Diffusion erfolgt. Da weder τ_1 noch τ_2 apriori abgeschätzt werden können, muß die Gültigkeit der quasilinearen Theorie für jedes Problem von neuem geprüft werden. Hierzu kann die Zeit τ_1 durch die u.U. leichter zu bestimmende Autokorrelationszeit des elektrischen Feldes

$$\tau_{ac} = \frac{1}{\langle |E|^2 \rangle} \cdot \int_0^\infty \langle E(x(t, x_0), t) E(x(t+\tau, x_0), t+\tau) \rangle d\tau \quad (4.39)$$

ersetzt werden. Dies wird bei der Ableitung der Glgen.4.37,4.38 im Rahmen der üblichen Fokker-Planck Theorie [vgl. z.B. ICHIMARU (1973) oder LICHTENBERG & LIEBERMAN (1983)] deutlich, worin dann anzunehmen ist, daß Ortsraumkorrelationen hinreichend schnell verschwinden.

Neben dieser Zeitskalentrennung geht in die QLT noch der thermodynamische Limes $L \rightarrow \infty$ bei fester mittlerer Energiedichte ein. Die Diffusionsgleichung 4.37 mit dem Diffusionskoeffizienten 4.38 wird das Verhalten eines endlichen Systems also nur dann beschreiben, wenn es den thermodynamischen Limes approximiert. Unseren Ergebnissen aus Kap.3.2 zufolge kann ein solches diffusives Verhalten für unser Modell erst auftreten, wenn die Ungleichung

$$\frac{\langle |E|^2 \rangle}{4\pi n k T_e} \geq \frac{\Gamma^4 \pi^3}{2^{0.5}} \cdot \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^3 \cdot \left\{ \left(\frac{v_{max}}{v_{th}} \right)^6 - \left(\frac{v_{min}}{v_{th}} \right)^6 \right\},$$

erfüllt ist. 3.51 (bzw. 3.52) stellt also für die Gültigkeit der QLT sicher eine notwendige Bedingung dar, die sich aus der Theorie Hamiltonscher Stochastizität ergibt. Die Ergebnisse der numerischen Überprüfung der QLT für das Modell aus 2.3 in Kap.4.5 werden noch weitere Rückschlüsse auf die Konsequenzen der Hamiltonschen Struktur unseres Problems auf die Anwendbarkeit der QLT erlauben. Zuvor jedoch soll der Diffusionskoeffizient 4.38 für unser Modell mit Potenzspektren ausgewertet und sodann die Diffusionsgleichung 4.37 analytisch diskutiert werden.

4.2 ANWENDUNG AUF DAS MODELL

Es soll nun die in 4.1 dargestellte Theorie auf das Modell aus Kap.2.3 angewendet werden. Wir hatten dort ein Potential

$$\Phi(x, t) = \sum_{m>0} \varepsilon \mathcal{E}_{k_m} \cos(k_m x - \omega_{pm} t + \varphi_{k_m}) \quad (4.40)$$

angenommen und wollen hier Potenzspektren $\varepsilon \mathcal{E}_{k_m} = \varepsilon \Phi_0 (k_1/k_m)^\eta$ betrachten. Ein solches Potential hat die komplexe Darstellung

$$\Phi(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{k_m} \exp[i(k_m x - \omega(k_m) t)] \quad (4.41)$$

mit

$$\phi_{k_m} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon_{|k_m|} \exp(i\varphi_{k_m}) \quad (4.42)$$

$$\varphi_{k_m} = -\varphi_{-k_m} \quad (4.43)$$

und

$$\omega(k) = \begin{cases} -\omega_{pe} & , \quad k < 0 \\ 0 & , \quad k = 0 \\ \omega_{pe} & , \quad k > 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Dem entspricht ein elektrisches Feld

$$E(x, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{k_m} \exp[i(k_m x - \omega(k_m) t)] \quad (4.45)$$

mit

$$E_{k_m} = -ik_m \phi_{k_m} = -i \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Phi_0 k_1 \cdot \left(\frac{k_1}{k_m} \right)^{\eta-1} \cdot e^{i\varphi_{k_m}} \quad (4.46)$$

Mit der Definition der 4.21b der Spektralfunktion $\varepsilon(k)$ ergibt der Ausdruck 4.38 für den Diffusionskoeffizienten

$$D(v) = 2\pi \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon\left(k=\frac{\omega}{v}\right)}{v} \quad (4.38)$$

für ein System endlicher Länge L

$$D(v) = \frac{L}{v} \cdot \frac{e^2}{m^2} \cdot |E_k|^2 \bigg|_{k=\frac{\omega}{v}} \quad (4.47)$$

Hierin ist $|E_k|^2$ die Fortsetzung des ursprünglich nur für die diskreten k_m definierten $|E_{k_m}|^2$,

$$|E_k|^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \Phi_0^2 \cdot k_1^2 \cdot \left(\frac{k_1}{k} \right)^{2\eta-2} \quad (4.48)$$

Damit wird für unser Modell

$$\begin{aligned}
 D(v) &= L \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \Phi_0^2 \cdot k_1^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{k_1}{k} \right)^{2\eta-2} \bigg|_{k=\frac{\omega_{pe}}{v}} \quad (4.49) \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \omega_{pe}^2 v_0^2 \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{v}{v_0} \right)^{2\eta-3} \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \omega_{pe}^2 v_{th}^2 \cdot \left(\frac{2\pi\lambda_D}{L} \right)^{2\eta-5} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{v}{v_{th}} \right)^{2\eta-3}
 \end{aligned}$$

Es mag an dieser Stelle auffallen, daß $D(v)$ -bei festem ε - mit $L \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, was scheinbar im Widerspruch zu dem gemäß Kap.4.1 im thermodynamischen Limes endlichen $D(v)$ steht. $D(v)$ verschwindet jedoch wie $L^{-(2\eta-5)}$, d.h. in der gleichen Weise wie die mittlere Energiedichte (vgl. 3.41). Bei fester Energiedichte (wie im thermodynamischen Limes erforderlich) steht auch der Diffusionskoeffizient einem nichtverschwindenden endlichen Wert zu.

Die Beschreibung der Teilchenbeschleunigung durch die Diffusionsgleichung 4.37 ist erst vollständig, wenn neben dem Diffusionskoeffizienten 4.49 auch geeignete Randbedingungen für f_0 angegeben werden, deren spezielle Form natürlich immer von der physikalischen Situation abhängen wird. Erinnern wir uns nun zunächst daran, daß wir hier hauptsächlich die stochastische Beschleunigung durch Langmuir-Turbulenz studieren wollen. Wegen der Dispersionsrelation der Langmuir-Wellen, $\omega^2(k) = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_D^2)$, liegt die Untergrenze des stochastischen Bereichs immer oberhalb von $\min(\omega(k)/k) = 3v_{th}$, also immer im Maxwellschwanz der Verteilung. Wenn die Relaxation der Verteilung auf Grund stochastischer Beschleunigung auf einer deutlich kürzeren Zeitskala als die Wiederherstellung einer thermischen Verteilung durch Stoßprozesse erfolgt, bildet damit der durch die Störung unbeeinflusste Hauptteil der Verteilung ein Teilchenreservoir. An der Untergrenze v_{min} des Bereichs globaler Stochastizität kann man daher

$$f_0(v_{min}, t) = \text{const} = f_0(v_{min}, t=0) \quad \text{für alle } t \quad (4.51)$$

annehmen.

Die Obergrenze v_{max} des stochastischen Gebiets liegt dagegen unterhalb der Phasengeschwindigkeit des langwelligsten Modes $v_o = \omega_{pe} L / 2\pi$. Für typische Plasmaparameter ist dieses v_o um ein Vielfaches größer als die Lichtgeschwindigkeit c , sodaß wir im Rahmen unseres Modells $v_{max} \rightarrow \infty$ setzen können. Die entsprechende Randbedingung wird dann

$$f_o(v, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty \quad (4.52)$$

Da wir gleichzeitig $D(v) \sim v^{2\eta-3}$ für alle v verwenden, bedeutet 4.52 auch, daß wir für kleine Wellenzahlen k ein Potenzspektrum annehmen. Numerische Simulationen [z.B. THOMPSON et al. (1974)] liefern nun Indizien für eine Potenzform des Spektrums turbulenter Langmuir-Wellen oberhalb von $k\lambda_D \approx 0.01$. Dies entspricht aber schon einer Phasengeschwindigkeit $v \sim 100 v_{th}$, die in der Regel schon oberhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen wird (vgl. Kap. 2.3; in einer Sonnenfackel war dort $v_{th} \sim 0.01c$ als typisch abgeschätzt worden.). Moden mit kleineren Wellenzahlen, die größeren resonanten Geschwindigkeiten entsprechen würden, spielen für die stochastische Beschleunigung von Teilchen im Rahmen unseres Modells daher keine Rolle. Die Beschränkung auf ein Potenzspektrum ist also durchaus gerechtfertigt.

4.3 ANALYTISCHE LÖSUNG DER QUASILINEAREN DIFFUSIONSGLEICHUNG FÜR $\eta > 2.5$

Im Rahmen der in Kap. 4.1 und 4.2 dargestellten Theorie kann die stochastische Teilchenbeschleunigung in unserem Modell 2.6 durch eine Diffusionsgleichung für $f_o = \langle f \rangle$

$$\frac{\partial f_o}{\partial t} = A \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[v^\mu \frac{\partial}{\partial v} f_o(v, t) \right] \quad (4.53)$$

mit den inhomogenen Randbedingungen

$$f_0(v=v_{\min}, t) = f_0(v=v_{\min}, t=0) \quad (4.54)$$

$$f_0(v, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty \quad (4.55)$$

beschrieben werden, worin

$$A = \frac{\pi \cdot \omega}{2} \cdot \rho_e v_{ph}^{5-2\eta} \left[\frac{2\pi\lambda_D}{L} \right]^{2\eta-5} \cdot \varepsilon^2 \quad (4.56)$$

und

$$\mu = 2\eta - 3 \quad (4.57)$$

Wegen der Linearität dieses inhomogenen Randwertproblems läßt sich seine allgemeine Lösung offenbar in der Form

$$f_0 = f_{in}(v, t) + f_h(v, t) \quad (4.58)$$

schreiben, worin f_{in} eine spezielle Lösung von 4.53 mit den Randbedingungen 4.54 und 4.55 ist. f_h stellt die allgemeine Lösung des homogenen Randwertproblems

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = A \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[v^\mu \frac{\partial f_h(v, t)}{\partial v} \right] \quad (4.59)$$

$$f_h(v_{\min}, t) = 0$$

$$f_h(v, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty$$

dar. Für $\eta > 2$ existiert eine stationäre Lösung von 4.53, die die Randbedingungen 4.54, 4.55 erfüllt,

$$f_s(v) = f_0(v=v_{\min}, t=0) \cdot \left[\frac{v}{v_{\min}} \right]^{-2\eta+4} \quad (4.60)$$

Auf dem Intervall $[v_{\min}, \infty]$ normierbar und damit physikalisch interessant ist f_s jedoch nur für $-2\eta+4 < -1$, also für $\eta > 5/2$ oder $\mu > 2$. Wir wählen daher

$$f_{1n} = f_s, \quad \text{falls } \eta > 2$$

Mittels des Separationsansatzes $f_n(v,t) = V(v)T(t)$ mit der Separationskonstanten $-\lambda$ reduziert sich das homogene Randwertproblem 4.59 auf gewöhnliche Differentialgleichungen für V und T . Für T erhält man

$$T' = -\lambda \cdot T \quad (4.61)$$

mit der Lösung

$$T \sim e^{-\lambda t}, \quad (4.62)$$

während sich für V das die Separationskonstante λ festlegende Eigenwertproblem

$$\lambda \cdot [v'' \cdot v']' + \lambda v = 0 \quad (4.63)$$

$$V(v_{min}) = 0 \quad (a)$$

$$V(v) \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow \infty \quad (b)$$

ergibt. Bei dessen Diskussion werden wir uns wie oben auf $\eta > 5/2$ beschränken. Dies ist allerdings im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine wesentliche Einschränkung, da das kritische Störspektrum, dem hier unsere Aufmerksamkeit insbesondere gilt, gemäß den Überlegungen in Kap.3 bei $\eta=4$ liegt.

Die weiter unten ausführlich dargestellte Analyse der Glgen.4.63 wird zeigen, daß für $\eta > 5/2$ unendlich viele, positive, monoton gegen $+\infty$ wachsende Eigenwerte λ_1

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \quad (4.64)$$

existieren. Die zugehörigen Eigenfunktionen V_i erfüllen eine Orthogonalitätsrelation und sind normierbar,

$$\int_{v_1}^{\infty} v_i v_j dv = \|v_i\|^2 \cdot \delta_{ij} \quad , \quad \|v_i\|^2 < \infty, \quad (4.65)$$

sodaß genau die Verhältnisse wie beim üblichen Sturm - Liouvilleschen Randwertproblem vorliegen, bei dem allerdings beide Randbedingungen im Endlichen gestellt sind. Insbesondere haben damit auch die Eigenwerte unseres RWP's 4.63 die ausführlich z.B. bei COURANT-HILBERT (1968) diskutierten Extremumseigenschaften, sodaß sich der dort gegebene Beweis der Vollständigkeit der Eigenfunktionen des Sturm - Liouvilleschen RWP's ohne weiteres auf unsere V_i überträgt. Es gilt also der Entwicklungssatz für stetige, stückweise differenzierbare Funktionen $F(v)$

$$F(v) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i V_i(v) \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_{v_{min}}^{\infty} F V_i dv. \quad (4.66)$$

Wegen des Superpositionsprinzips läßt sich die allgemeine Lösung unseres inhomogenen RWP's 4.53..55 für hinreichend wohlverhaltene Anfangswerte $f(v, t=0)$ dann schreiben

$$f_0(v, t) = f_{\infty} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i V_i(v) \exp(-\lambda_i t) \quad (4.67)$$

worin

$$c_i = \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_{v_{min}}^{\infty} [f(v, 0) - f_{\infty}] V_i(v) dv. \quad (4.68)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen des RWP's 4.63 wirklich die geforderten Eigenschaften haben. Hierzu werde ich die λ_i und V_i durch Zurückführen der Dgl. 4.63a auf die Besselsche Differentialgleichung explizit bestimmen. Mit dem Ansatz [KAMKE (1977)]

$$v(v) = v^{\alpha} W(\beta v^{\gamma}) \quad (4.69)$$

und der Substitution

$$u = \beta v^{\gamma} \quad (4.70)$$

ergibt sich aus der Gleichung 4.63 für $V(v)$

$$v^{\mu} V'' + \mu v^{\mu-1} V' + \frac{\lambda}{A} V = 0$$

eine für $W(u)$,

$$u^2 W'' + \frac{\mu+2\alpha+\gamma-1}{\gamma} \cdot u W' + \left[\frac{\alpha}{\gamma^2} (\mu+\alpha-1) + \frac{\lambda}{A \gamma^2 \beta^{-(\mu-2)/\gamma}} \cdot u^{-(\mu-2)/\gamma} \right] \cdot W = 0, \quad (4.71)$$

die sich durch die Wahl

$$\gamma = -\frac{\mu-2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{\lambda}{A \gamma^2}, \quad \alpha = \frac{1-\mu}{2}$$

auf eine Besselsche Dgl. reduziert:

$$(u^2 - v^2) \cdot W + u W' + u^2 W'' = 0 \quad (4.72)$$

worin

$$\nu = \left| \frac{1-\mu}{2} \right|. \quad (4.73)$$

Deren allgemeine Lösung setzt sich gerade aus den Besselfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung ν , J_ν und K_ν , zusammen

$$W(u) = A_1 J_\nu(u) + A_2 K_\nu(u), \quad (4.74)$$

sodaß sich nach Rückgängigmachen des Ansatzes 4.69 und der Substitution 4.70 die allgemeine Lösung der Dgl. 4.63 darstellt als

$$V(v) = v^{(1-\mu)/2} \cdot \left\{ A_1 J_\nu \left(\frac{2}{\sqrt{\mu-2}} \sqrt{\frac{\lambda}{A}} \cdot v^{-(\mu-2)/2} \right) + A_2 K_\nu \left(\frac{2}{\sqrt{\mu-2}} \sqrt{\frac{\lambda}{A}} \cdot v^{-(\mu-2)/2} \right) \right\} \quad (4.75)$$

mit zwei Konstanten A_1, A_2 . Nun ist für $\mu > 2$ $-(\mu-2)/2 < 0$, für $v \rightarrow \infty$

geht also $v^{-(\mu-2)/2} \rightarrow 0$. Mit dem asymptotischen Verhalten der Besselfunktionen für $x \ll 1$ (vgl. [WATSON (1962)])

$$J_\nu(x) \sim x^\nu \quad (4.76)$$

$$K_\nu(x) \sim x^{-\nu} \quad (4.77)$$

gilt offenbar für $\nu \rightarrow \infty$

$$V(\nu) \sim \left\{ \tilde{A}_1 v^{(1-\mu)/2 - \nu(\mu-2)/2} + \tilde{A}_2 v^{(1-\mu)/2 + \nu(\mu-2)/2} \right\} \quad (4.78)$$

worin

$$\frac{1-\mu}{2} - \nu \cdot \frac{\mu-2}{2} = 1-\mu < 0 \quad (4.79)$$

und

$$\frac{1-\mu}{2} + \nu \cdot \frac{\mu-2}{2} = 0. \quad (4.80)$$

Die Randbedingung 4.63a, $V(\nu) \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$, erzwingt damit $A_2 = 0$. Aus der Forderung 4.63b, $V(v_{\min}) = 0$, folgt dann unmittelbar

$$J_\nu \left(\frac{2}{\sqrt{\mu-2}} \sqrt{\tilde{A}_1} \cdot v_{\min}^{-(\mu-2)/2} \right) = 0 \quad (4.81)$$

und damit für die Eigenwerte λ_i unseres Rand - Eigenwertproblems

$$\lambda_i = \frac{(\mu-2)^2}{4} \cdot \tilde{A}_1 \cdot v_{\min}^{\mu-2} \cdot \chi_{i\nu}^2, \quad (4.82)$$

worin $\chi_{i\nu}$ die i -te positive Nullstelle von $J_\nu(x)$ ist,

$$J_\nu(\chi_{i\nu}) = 0. \quad (4.83)$$

Nun ist für $\nu \neq 0$ auch $J_\nu(0) \neq 0$, also $\chi_{i\nu} \neq 0$ für $\nu \neq 0$, und die Nullstellen der Besselfunktionen lassen sich in eine monoton gegen $+\infty$ wachsende Folge anordnen. Diese Eigenschaften übertragen sich natürlich sofort auf die λ_i , sodaß offenbar

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty. \quad (4.84)$$

Die den Eigenwerten λ_i entsprechenden Eigenfunktionen sind damit

$$v_i(v) = v^{(1-\mu)/2} \cdot J_\nu \left[\chi_{i\nu} \left(\frac{v}{v_{min}} \right)^{-(\mu-2)/2} \right]. \quad (4.85)$$

Letztere sind orthogonal und normierbar wegen der Orthonormalität der Besselfunktionen auf $[0,1]$:

$$\int_0^1 x J_\nu(\chi_{i\nu} x) J_\nu(\chi_{j\nu} x) dx = \frac{1}{2} \cdot [J_{\nu+1}(\chi_{i\nu})]^2 \cdot \delta_{ij} \quad (4.86)$$

Mit geeigneter Substitution $u = (v/v_{min})^{-(\mu-2)/2}$ wird nämlich

$$\begin{aligned} & \int_{v_{min}}^{\infty} v_i v_j dv \\ &= \int_{v_{min}}^{\infty} v^{1-\mu} J_\nu \left[\chi_{i\nu} \left(\frac{v}{v_{min}} \right)^{-(\mu-2)/2} \right] J_\nu \left[\chi_{j\nu} \left(\frac{v}{v_{min}} \right)^{-(\mu-2)/2} \right] dv \\ &= \frac{2}{\mu-2} v_{min}^{2-\mu} \cdot \int_0^1 u J_\nu(\chi_{i\nu} u) J_\nu(\chi_{j\nu} u) du \\ &= \frac{[J_{\nu+1}(\chi_{i\nu})]^2}{\mu-2} v_{min}^{2-\mu} \cdot \delta_{ij}, \end{aligned}$$

sodaß insbesondere

$$\|v_i\|^2 = \frac{v_{min}^{2-\mu}}{\mu-2} \cdot [J_{\nu+1}(\chi_{i\nu})]^2. \quad (4.87)$$

Damit lassen sich die bisher erzielten analytischen Ergebnisse wie folgt zusammenfassen: Für $\eta > 5/2$ hat das inhomogene Randwertproblem 4.53..55 für hinreichend wohlverhaltene Anfangswerte $f(v, t=0)$ die allgemeine Lösung

$$f_0(v, t) = f_s(v) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(v) \cdot \exp(-\lambda_i t) \quad (4.88)$$

worin

$$\lambda_i = \frac{\pi^2}{2} \left(\eta - \frac{5}{2} \right)^2 \omega_p^2 \exp \left(\frac{2\pi\lambda_D}{L} \right)^{2\eta-5} \left(\frac{v_{min}}{v_{th}} \right)^{2\eta-5} \cdot \chi_{i\nu}^2 \quad (4.89a)$$

$$v_i(v) = v^{2-\eta} \cdot J_{\nu} \left[\chi_{i\nu} \left(\frac{v}{v_{min}} \right)^{-\eta+5/2} \right] \quad (4.89b)$$

$$\nu = \left| \frac{4}{2\eta} - \frac{2\eta}{5} \right| \quad (4.89c)$$

$$c = \frac{1}{\|v_i\|^2} \int_{v_{min}}^{\infty} (f(v, 0) - f_s(v)) v_i(v) dv \quad (4.89d)$$

$$\|v_i\|^2 = \frac{v_{min}^{5-2\eta}}{2\eta-5} \cdot [J_{\nu+1}(\chi_{i\nu})]^2 \quad (4.89e)$$

Bevor ich mich nun der Diskussion dieser Ergebnisse und ihrer numerischen Verifikation zuwende, sei noch kurz der Fall $\eta < 5/2$ betrachtet.

Die oben dargestellte Analysis des Randwertproblems beruhte im wesentlichen auf der Existenz einer den Randbedingungen 4.54 und 4.55 genügenden stationären Lösung für $\eta > 2$ und der Vollständigkeit und Orthogonalität der Eigenfunktionen des Eigenwertproblems 4.63 für $\eta > 5/2$. Für $\eta \leq 5/2$ bleibt 4.63 zwar einer analytischen Diskussion zugänglich, jedoch lassen sich die für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes 4.66 nötigen Eigenschaften der Eigenfunktionen nicht mehr nachweisen, womit der Separationsansatz zur Lösung von 4.59 wertlos wird. Ähnliches gilt für die Reduktion des inhomogenen Randwertproblems 4.53..55 auf ein homogenes 4.59. Eine spezielle Lösung von 4.53..55 ist für $\eta < 2$ analytisch als Ähnlichkeitslösung $f_0(v, t) = F(v^\alpha t^\beta)$ nur für $v_{min} = 0$ zu erhalten (nur dann geht nämlich die Bedingung $f(v_{min}, t) = \text{const}$ über in $F(y) = \text{const}$ bei $y=0$ oder $y=\infty$), nicht aber für beliebige v_{min} . Eine analytische Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \Lambda \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[v^\mu \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t) \right]$$

für den Parameterbereich $\mu \leq 2$ ($\eta \leq 2.5$) findet sich bei WU, GAFFEY & LIBERMAN (1981), allerdings für andere Randbedingungen. WU et al. fordern Teilchenzahlerhaltung, also

$$v^\mu \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \quad \text{bei} \quad v = 0$$

und lösen dann 4.53 mittels expliziter Konstruktion einer Greeneschen Funktion; ihr Konstruktionsverfahren ist aber nicht ohne weiteres auf unsere Randbedingungen 4.54 und 4.55 übertragbar.

4.4 KONSEQUENZEN DER QUASILINEAREN THEORIE FÜR DIE STOCHASTISCHE BESCHLEUNIGUNG

Kap.4.1 hat gezeigt, daß für nicht zu große ε die Teilchenbeschleunigung in global stochastischen Gebieten des Phasenraums durch

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left[D(v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t) \right] \quad (4.34)$$

beschrieben werden kann, wobei aus der detaillierten Anwendung der quasilinearen Theorie auf unser Modell 2.6 in Kap.4.2 für $D(v)$

$$D(v) = \frac{\pi}{2} \cdot \omega_{pe}^2 v_0^2 \varepsilon^2 \cdot \left[\frac{v}{v_0} \right]^{2\eta-3} \quad (4.50)$$

folgte. Kap.4.3 schließlich gab die allgemeine Lösung dieser Diffusionsgleichung für Potenzspektren mit $\eta > 2.5$ und für die Randbedingungen 4.54 und 4.55 an, die der hier betrachteten Beschleunigung von Elektronen durch longitudinale elektrostatische Wellen angepaßt sind,

$$f_0(v=v_{\min}, t) = f_0(v=v_{\min}, t=0) \quad (4.54)$$

bzw.

$$f_0(v, t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty. \quad (4.55)$$

Im folgenden sollen die physikalischen Konsequenzen dieser eher mathematisch handwerklichen Resultate diskutiert werden. Beginnen wir daher mit einigen elementaren Überlegungen, die von der analytischen Lösung in 4.3 noch keinen Gebrauch machen.

Im Regime globaler Stochastizität erfährt ein Teilchen im Rahmen seiner quasistochastischen Bewegung Geschwindigkeitsänderungen Δv , die oberhalb des bei regulärer Bewegung zu erwartenden $\Delta v \sim \varepsilon^{1/2}$ liegen. Einzelne Partikel können in solchen global stochastischen Bereichen immer sowohl beschleunigt als auch abgebremst werden. Physikalisch sinnvoll ist es daher, nur dann von einer stochastischen Beschleunigung zu sprechen, wenn die mittlere Geschwindigkeit im resonanten Intervall zunimmt, wenn also $d\bar{v}/dt > 0$ ist. Wir haben

$$\bar{f} := \int_{v_{\min}}^{\infty} f_0(v, t) dv \quad (4.90)$$

und mit 4.37

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \int_{v_{\min}}^{\infty} dv \frac{\partial}{\partial v} \left[D(v) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] = -D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v_{\min}} \quad (4.91)$$

Damit wird wegen

$$\bar{v} := \frac{1}{\bar{f}} \int_{v_{\min}}^{\infty} v \cdot f_0(v, t) dv \quad (4.92)$$

sofort nach zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\bar{v}}{\bar{f}} \cdot \frac{d\bar{f}}{dt} + \frac{1}{\bar{f}} \int_{v_{\min}}^{\infty} dv v \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[D(v) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \\ &= \frac{\bar{v}}{\bar{f}} \cdot D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v_{\min}} - \frac{\bar{v}}{\bar{f}} \cdot D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v_{\min}} + D(v) \frac{f_0}{\bar{f}} \Big|_{v_{\min}} + \overline{D'(v)} \quad (4.93) \end{aligned}$$

worin

$$\overline{D'(v)} = \frac{1}{\bar{f}} \cdot \int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dD(v)}{dv} f_0(v, t) dv \quad (4.94)$$

Für eine im Intervall $[v_{\min}, v_{\max}]$ anfänglich lokalisierte Verteilungsfunktion kann man zunächst die Randbeiträge vernachlässigen, sodaß also zumindest für eine Anfangsphase ihrer Entwicklung

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \overline{D'(v)} \quad (4.95)$$

gilt. Hinreichend für das Auftreten stochastischer Beschleunigung ist damit

$$D'(v) > 0 \text{ in } [v_{\min}, v_{\max}],$$

was mit 4.50 erfüllt ist für

$$\eta > \frac{3}{2}.$$

Interessanterweise gelangt man zu einem anderen Resultat, sieht man wie z.B. MELROSE (1980) die Zunahme der mittleren Energie als Kriterium für stochastische Beschleunigung an. Mit

$$\overline{v^2} := \frac{1}{\bar{f}} \cdot \int_{v_{\min}}^{\infty} v^2 \cdot f_0(v, t) dv \quad (4.96)$$

wird

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{v^2}}{dt} &= \frac{\overline{v^2}}{\bar{f}} \cdot D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v_{\min}} - \frac{v^2}{\bar{f}} \cdot D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v_{\min}} + 2vD(v) \frac{f_0}{\bar{f}} \Big|_{v_{\min}} \\ &\quad + 2[\overline{vD(v)}]'. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Nach Vernachlässigung der Randterme bleibt

$$\frac{d\overline{v^2}}{dt} = 2[\overline{vD(v)}]'$$

Hinreichend für die Zunahme der mittleren Energie im resonanten Intervall, $\overline{dv^2}/dt > 0$, ist daher

$$[vD(v)]' > 0 \quad \text{in} \quad [v_{\min}, v_{\max}]$$

oder wegen 4.50

$$\eta > 1.$$

Physikalisch klärt sich diese Diskrepanz sofort beim Betrachten eines Teilchenstrahls mit wohldefinierter Anfangsgeschwindigkeit, $f_0(v, t=0) \sim \delta(v-v_0)$, $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$. Dann wird für Spektren mit $1 < \eta < 3/2$ die mittlere Geschwindigkeit mit der Zeit nicht schnell genug abnehmen, um die Zunahme der mittleren Energie durch die Verbreiterung der Verteilung im Zuge des Diffusiosprozesses auszugleichen. In jedem Fall führt aber das optimale $\eta=4$ Spektrum nicht nur zur Beschleunigung einzelner Teilchen, sondern auch zu einem mittleren Geschwindigkeits- bzw. Energiezuwachs. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die Ableitung von 4.95 und 4.98 natürlich nur für hinreichend schnell fallende $f(v, t)$ korrekt ist, die die Existenz der auftretenden Integrale sicherstellen.

In ihrer Endphase dagegen ist f_0 für $\eta > 5/2$ übergegangen in die stationäre Verteilung 4.60,

$$f_s(v) = f_0(v=v_{\min}, t=0) \cdot \left(\frac{v}{v_{\min}} \right)^{-2\eta+4}. \quad (4.60)$$

Im Rahmen unseres stark vereinfachten Modells 2.6 führt die stochastische Beschleunigung also zu Elektronenverteilungen, die für kleine Geschwindigkeiten $v < v_{\min}$ eine Maxwellform haben, oberhalb von $v_{\min}$ aber einem Potenzgesetz genügen. Eine solche Potenzform des Elektronenspektrums für große Geschwindigkeiten bzw. Energien kann als "suprathermal tail" im Zusammenhang mit turbulenter Beschleunigung von Teilchen auch experimentell beobachtet werden. So zeigen z.B. LIN et al. (1982) Energiespektren von schnellen Elektronen, die während einer Sonnenfackel auftreten, mit einer Energieverteilung $N(E) \sim E^{-\alpha}$, $\alpha=0.6 \dots 3.6$ (vgl. Abb.7). Zwischen der Energieverteilung $N(E)$ und der Geschwindigkeits-

verteilung $f_0(v, t)$ rechnet man gemäß

$$\int f_0(v) dv = \frac{1}{(2m)^{1/2}} \cdot \int f_0 \left[\sqrt{2E/m} \right] E^{-1/2} \cdot dE$$

leicht um:

$$N(E) \sim \frac{1}{E^{1/2}} \cdot f \left[\sqrt{2/m} \cdot E^{1/2} \right].$$

Unsere stationäre Verteilung im Geschwindigkeitsraum $\sim v^{-2\eta+4}$ führt also zu einem Energiespektrum $N_*(E)$

$$N_*(E) \sim E^{-\eta+3/2}. \quad (4.99)$$

Die beobachteten Spektralindices $\alpha=0.6..3.6$ entsprächen damit Langmuir-Spektren mit $\eta=\alpha+3/2$ im Bereich $\eta=2.1..5.1$, der im wesentlichen von unserer Analysis erfaßt wird. Dem kritischen Spektrum entspräche $\alpha=2.5$ (vgl. Abb. 7).

Mittels der expliziten, analytischen Lösung der Diffusionsgleichung 4.53 aus Kap. 4.3 kann nun die Relaxationszeit für die Ausprägung eines solchen "suprathemal tail" abgeschätzt werden. Zunächst einmal entnimmt man der Struktur der allgemeinen Lösung des Rand-Anfangswertproblems 4.53..55,

$$f_0(v, t) = f_s + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(v) \exp(-\lambda_i t) \quad (4.67)$$

mit $\lambda_i > 0$ für alle i , daß für $t \rightarrow \infty$ jedes beliebige f gegen f_s strebt. Die Differenz zwischen f und f_s läßt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \sqrt{\Lambda^2} &= \left[\int_{v_{min}}^{\infty} (f - f_s)^2 dv \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{i,j} c_i c_j \exp[-(\lambda_i + \lambda_j) t] \cdot \int_{v_{min}}^{\infty} v_i v_j dv \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_i c_i^2 \exp[-2\lambda_i t] \cdot \|v_i\|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen dem Anwachsen der λ_i für $i \rightarrow \infty$ ist also für hinreichend große Zeiten

$$\sqrt{\Lambda^2} \sim \exp(-\lambda_1 t),$$

womit

$$\tau_R = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{\pi} \varepsilon^{-2} \omega_{pe}^{-1} \left[\frac{L}{2\pi\lambda_D} \right]^{2\eta-5} \left[\frac{v_{th}}{v_{min}} \right]^{2\eta-5} \cdot \frac{1}{(\eta - \frac{5}{2})^2 \chi_{1\nu}^2} \quad (4.100)$$

als typische Zeitskala für die Relaxation einer Verteilung angesehen werden kann. Hierin gilt für die erste Nullstelle $\chi_{1\nu}$ von J_ν nach WATSON (1963) die Abschätzung

$$\nu(\nu+2) < \chi_{1\nu}^2 < \frac{4}{3}(\nu+1)(\nu+5)$$

und näherungsweise

$$\chi_{1\nu} \approx \left[\frac{3+\nu}{4} \right] \cdot \pi. \quad (4.101)$$

Mit 4.101 wird 4.100

$$\begin{aligned} \tau_R &\approx \varepsilon^{-2} \omega_{pe}^{-1} \left[\frac{L}{2\pi\lambda_D} \right]^{2\eta-5} \left[\frac{v_{th}}{v_{min}} \right]^{2\eta-5} \cdot \frac{128}{\pi^2 (10\eta-23)^2} \quad (4.102) \\ &\sim \varepsilon^{-2} n^{2\eta-6} L^{2\eta-5}. \end{aligned}$$

Überraschenderweise nimmt für Spektren mit $2.5 < \eta < 3$ die Relaxationszeit mit zunehmender Dichte ab, während sie für $\eta > 3$ mit $n^{2\eta-6}$ anwächst. Für das optimale $\eta=4$ -Spektrum verhält sich τ_R also wie n^2 . Von der Elektronentemperatur T_e hängt τ_R dagegen -unabhängig von η - nicht ab.

4.5 NUMERISCHE VERIFIKATION DER QLT

Wesentlich für die Ergebnisse aus 4.4 war die Beschreibung der Bewegung der Elektronen unter dem Einfluß turbulenter Wellen durch

eine Diffusion im Geschwindigkeitsraum mit einem geschwindigkeitsabhängigen Diffusionskoeffizienten $D(v) \sim v^{2\eta-3}$. Anhand der in Kap.3.3 bereits diskutierten numerischen Repräsentation unseres Modells 2.6 soll dies nun überprüft werden, wobei wir uns auf den Fall des kritischen Spektrums $\eta=4$ beschränken.

Dazu sind nun einige Vorbemerkungen über die zeitliche Entwicklung von δ -funktionsartigen Anfangsverteilungen $f_0(v, t=0) = \delta(v-v_0)$ unter einer Diffusionsgleichung 4.37 erforderlich. Liegt v_0 im Inneren des resonanten Intervalls, so wird zunächst $f_0(v, t)$ an dessen Rand $v=v_{\min}$ noch verschwinden. Die Gleichungen 4.95 und 4.98 beschreiben also die Entwicklung von $\bar{v}$ und $\overline{v^2}$ in ihrer Anfangsphase,

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \overline{D'(v)} \quad (4.95)$$

$$\frac{d\overline{v^2}}{dt} = 2\overline{[vD(v)]'} \quad (4.98)$$

Dann ist für $t=0$ oder für $D=\text{const.}$ mit $\Delta v = v - \bar{v}$ bzw. $\overline{(\Delta v)^2} = \overline{v^2} - \bar{v}^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\Delta v^2} &= \frac{d}{dt} \overline{v^2} - 2\bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \\ &= 2\overline{vD'(v)} + 2\overline{D(v)} - 2\bar{v} \cdot \overline{D'(v)} \\ &= 2\overline{D(v)} = 2\overline{D(v_0)} \end{aligned}$$

Die Varianz einer δ -funktionsartigen Anfangsverteilung wächst nur für einen nicht geschwindigkeitsabhängigen Diffusionskoeffizienten linear mit der Zeit

$$\overline{\Delta v^2} = 2Dt.$$

Hängt D von v ab, $D=D(v)$, so weiß man nur noch, daß mit $f(v, t=0) = \delta(v-v_0)$

$$\left. \frac{d}{dt} \overline{\Delta v^2} \right|_{t=0} = 2D(v_0) \quad (4.103)$$

ist. Linearer Anstieg von $\overline{\Delta v^2}$ mit der Zeit kann also im allgemeinen nicht als notwendiges Kriterium für das Auftreten von Diffusion im Geschwindigkeitsraum betrachtet werden, im Gegensatz zu dem in der Literatur üblichen Vorgehen.

Zur Überprüfung der quasilinearen Theorie soll nun die in Kap.3.3 bereits untersuchte numerische Repräsentation unseres Modells 2.6 verwendet werden. Für das durch die Hamiltonfunktion 3.51 dargestellte System

$$H = \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \cdot \sum_{m=10}^{22} \frac{1}{m} \cdot \cos(mx-t)$$

läßt die QLT im Regime globaler Stochastizität im resonanten Intervall $[v_{\min}=1/22, v_{\max}=1/10]$ einen Diffusionskoeffizienten

$$D(v) = \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \cdot v^{2\eta-3} \quad (4.104)$$

erwarten. Wie schon in Kap.3.3 wurden für die durch Verteilungsfunktionen f_i beschriebenen Ensemble mit wohldefinierten Anfangsgeschwindigkeiten v_i

$$f_i \sim \sum_{j=1}^K \delta(v-v_i) \delta(x-x_{ij})$$

($v_i = 1/(n_0+i)$, $n_0=10$, $K=200$ und x_{ij} gleichverteilt aus $[0, 2\pi]$) die Trajektorien mittels eines Leapfrog-Verfahrens verfolgt. Der sich aus dieser numerischen Integration ergebende Verlauf von $\overline{\Delta v^2}$ ist in Abb.8 für ein typisches Beispiel dargestellt und mit der analytischen Lösung aus Kap.4.3 verglichen. Hierzu wurden die Koeffizienten c_i in 4.88 so bestimmt, daß $f_0(v, t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ eine δ -funktionsartige Anfangsverteilung approximiert, $f(v, t=0) \approx \delta(v-v_i)$. Die von der QLT vorhergesagte Zeitentwicklung von

$\overline{\Delta v^2}$ erhält man dann gemäß $\overline{\Delta v^2} = \overline{v^2} - \overline{v}^2$ durch die numerische Auswertung der Integrale in $\overline{v} = \int v f_0(v, t) dv$ bzw. $\overline{v^2} = \int v^2 f_0(v, t) dv$ für die interessierenden Zeitpunkte. Es stellte sich heraus, daß für eine hinreichend gute Darstellung der Anfangsphase der Entwicklung und insbesondere für eine hinreichend gute Approximation des Anfangswertes $\overline{\Delta v^2}(t=0)=0$ sehr viele Fouriermoden berücksichtigt werden müssen (200 in Abb.8a).

Die zunächst recht gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kurven bestätigt die Gültigkeit der QLT. Die später auftretenden Abweichungen dürfen dabei nicht weiter überraschen, da die numerische Simulation anderen Randbedingungen als die Analysis genügt. Wegen der beschränkten Anzahl der Moden haben wir im System 3.5.1 $D(v)=0$ für $v \notin [v_1, v_2]$, wenn v_1 und v_2 die Grenzen des Bereiches globaler Stochastizität sind. Die Teilchenzahlerhaltung würde dann als eigentlich angemessene Randbedingungen für die quasilineare Diffusionsgleichung

$$v^\mu \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}(v, t) \Big|_{v_1} = v^\mu \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}(v, t) \Big|_{v_2}$$

erfordern. Übereinstimmung mit der analytischen Lösung unter den "physikalischen" Randbedingungen 4.52 und 4.52 ist daher für unsere δ -funktionsartigen Anfangsverteilungen nur in einer Anfangsphase der Entwicklung zu erwarten, in der die Randeffekte noch keine Rolle spielen. Die Schlußfolgerung, daß die in Abb.8a zu erkennende plötzliche Abweichung der analytisch erhaltenen Kurve von der numerischen Simulation nur eine Folge der beschränkten Modenzahl ist, wird durch Abb.8b bestätigt. Abb.8b zeigt die Geschwindigkeiten des jeweils schnellsten bzw. langsamsten Teilchens, mithin also die Ausdehnung des Ensembles im Geschwindigkeitsraum: Die Abweichung von der QLT tritt in Abb.8a gerade zu dem Zeitpunkt auf, an dem die ersten Teilchen die Ränder des stochastischen Intervalls $[v_1, v_2]$ erreichen. v_1 und v_2 sind dabei gegeben durch $v_1 \approx v_{\min} - \Delta v_{\min}$ und $v_2 \approx v_{\max} + \Delta v_{\max}$, wo $\Delta v_{\min}$ und $\Delta v_{\max}$ die Inselbreiten der Resonanzen $v_{\min}$ und $v_{\max}$ sind.

In Abb.8b sind weiterhin die $v_i^n = [0, i, 1, 1, \dots]$ für $i=10, \dots, 21$ markiert. v_i^n stellt die "nobelste" Windungszahl im zwischen zwei benachbarten Resonanzen v_i und v_{i+1} , $v_i = 1/i$, dar. In der Umgebung dieses v_i^n liegt daher im Phasenraum diejenige KAM-Kurve, die mit wachsendem ε zwischen v_i und v_{i+1} als letzte zerstört wird. Entsprechend finden wir nach den Vorstellungen von [MACKAY et al.(1984)] im Regime globaler Stochastizität für nicht zu große ε in der Nähe von v_i^n einen Cantorus, der als Barriere für den chaotischen Transport wirkt. Abb.8b bestätigt dieses Bild. Der zu erkennende stufenförmige Verlauf der größten bzw. kleinsten Geschwindigkeit des Ensembles wird durch die Annahme plausibel, daß die Teilchen -einmal in der Nähe eines Cantorus angekommen-, sich entlang diesem bewegen, bis sie schließlich auf eine Lücke stoßen. Die Anwesenheit solcher Cantori auch für das schon relativ große ε in Abb.8a,b erklärt schließlich, warum das beobachtete $\overline{\Delta v^2}(t)$ schon dann leicht unterhalb des im Rahmen der QLT zu erwartenden verläuft, wenn sich noch keine Randeffekte bemerkbar machen: Wir sehen hier die den Transport behindernde Wirkung der Cantori.

Wie in der Vorbemerkung ausführlich dargestellt, kann man aus der Zunahme der Varianz $(\overline{\Delta v^2})_i$ eines solchen Ensembles mit $f_0(v, t=0) \sim \delta(v - v_i)$ den Diffusionskoeffizienten an der Stelle v_i ablesen,

$$D(v_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\overline{\Delta v^2} \right]_i \Big|_{t=0}.$$

Die statistische Ungenauigkeit der Daten auf Grund der endlichen Anzahl der Ensemblemitglieder sowie die in jedem Fall gerade für die Anfangsphase zu erwartenden Abweichungen von der zeitasymptotischen quasilinearen Theorie erschweren nun eine wohldefinierte Bestimmung der Anfangssteigung $2D(v_i)$. Abb.9 zeigt jedoch, daß die mittlere Steigung $\alpha(t)$,

$$\alpha(t) = \frac{\int_0^t dt' \overline{t'(\Delta v^2)}_i}{\int_0^t dt' t'^2}, \quad (4.105)$$

für unser Problem relativ wohlverhalten ist. Wir können also in guter Näherung $D(v_i)$ durch Extrapolation von α aus den numerischen Daten nach $t=0$ bestimmen. Dieses Verfahren ist jedoch nur zulässig, solange ε nicht zu groß wird. Es setzt nämlich voraus, daß der Einschwingvorgang, für den die QLT nicht gültig sein kann, auf einer Zeitskala abläuft, die kurz gegen diejenige ist, auf der die Verbreiterung der ursprünglich δ -funktionsartigen Anfangsverteilung stattfindet. Das ist für große ε zumindest für unser Modell nicht der Fall, sodaß also eine solche Extrapolation nicht mehr den Wert von $D(v)$ liefert. Vielmehr wäre es erforderlich, durch Vergleich der numerisch beobachteten Zeitentwicklung von $\overline{\Delta v^2}$ mit dem analytisch gemäß 4.88 zu erwartenden Verlauf $D(v)$ vermittels eines geeigneten Algorithmus zu ermitteln.

Das so erhaltene $D(v)$ ist in Abb.10 für ein ε knapp oberhalb des kritischen ε^* ($\varepsilon=0.063$) und in Abb.11 für ein ε im Gültigkeitsbereich der QLT ($\varepsilon=0.23$) dargestellt. In beiden Fällen ist im Inneren des resonanten Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ wie von der quasilinearen Theorie für $\eta=4$ vorhergesagt $D(v) \sim v^5$. Während aber für $\varepsilon=0.23$ der "gemessene" Diffusionskoeffizient $D_m(v)$ ungefähr gleich dem quasilinearen $D_{q1} = \frac{\pi}{2} \varepsilon^2 v^5$ ist, haben wir für das ε in der Nähe des kritischen ε^* $D_m/D_{q1} \approx 0.14 \approx 1/7$. Diese Beobachtung steht in Übereinstimmung mit dem in Kap.3.1 (vgl. Skizze5) zusammengefaßten Vorstellungen über den Transport in chaotischen Systemen. Wir hatten dort gesehen, daß die KAM-Tori mit wachsendem ε nicht schlagartig zerstört werden, sondern zunächst in Cantori übergehen, die als die Diffusion bremsende Barrieren wirken. Hätten die Cantori zwischen benachbarten Resonanzen verschiedene Durchlässigkeiten, so wäre aber nicht mehr $D \sim v^5$. Da der Diffusionskoeffizient im resonanten Intervall gleichmäßig auf $\approx 1/7$ erniedrigt wird, können wir also schließen, daß sich für das kritische Spektrum die Auflösung der Cantori zwischen allen

benachbarten Resonanzen in gleichem Maße vollzieht. Ein solches Verhalten kann man im übrigen ja auch erwarten, denn das kritische Spektrum war unter Anwendung des Overlap-Kriteriums gerade durch die Forderung des gleichmäßigen Überlappens aller Resonanzen definiert worden. Indirekt bestätigt also Abb.10 die Tragfähigkeit dieser elementaren Argumentation.

Gleiches gilt für den in den Abbgen. 10 und 11 zu beobachtenden Abfall des Diffusionskoeffizienten an den Rändern des resonanten Intervalls. Bei der Diskussion unserer numerischen Repräsentation in Kap.3.3 haben wir als Konsequenz der CHIRIKOVschen Vorstellungen gesehen, daß ein Modell mit wenigen Moden zur Simulation des allgemeinen Systems 2.6 geeignet ist, wenn

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta_n \approx O(\min(|p_n - p_{n+1}|, |p_n - p_{n-1}|))$$

und

$$\Delta_n < O(p_{\max} - p_{\min}).$$

In diesem Fall sollte die Teilchenbewegung im Inneren des Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ mit der in einem System mit vielen nichtverschwindenden Fourierkomponenten übereinstimmen und nur an seinen Rändern sollten Differenzen bemerkbar werden. Genau dieses Verhalten beobachtet man aber in den Abbgen. 10 und 11, wo der Diffusionskoeffizient in der Nähe der Intervallgrenzen von dem für unendlich ausgedehnte Systeme abweicht. Abbgen. 10 und 11 sind daher auch Indiz für die Gültigkeit obiger Schlußfolgerungen und somit für die Leistungsfähigkeit der Overlap-Argumentation. Wir können damit festhalten, daß unsere numerische Untersuchung der Diffusion im Geschwindigkeitsraum die quasilineare Theorie bestätigt und gleichzeitig Indicien für die Gültigkeit der CHIRIKOVschen Vorstellungen liefert.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION

In der vorliegenden Arbeit wurden zentrale Ergebnisse der Theorie Hamiltonscher Systeme auf die stochastische Beschleunigung

von Teilchen in longitudinalen elektrostatischen Wellen angewendet. Kap.2 hat dann zunächst deutlich gemacht, daß dieser Effekt im Zusammenhang mit der Beschleunigung von Elektronen durch Langmuir-Turbulenz in Sonnenfackeln von physikalischer Bedeutung sein kann, und sodann unter Vernachlässigung der selbstkonsistenten Wechselwirkung von Wellen und Teilchen ein Modell mit Hamiltonscher Struktur zu seiner Beschreibung angegeben. Es kann -wie wir uns ergänzend überzeugten- mit trivialen Änderungen auch auf die Elektronenbeschleunigung parallel zum Magnetfeld durch lower-hybrid-Wellen angewendet werden.

Auf diese Modellgleichungen wurden nun die Begriffe und Methoden der Theorie nahezu integrierbarer Hamiltonscher Systeme angewandt. So führte insbesondere die sorgfältige Auswertung der Chirikovschen Overlap-Argumentation zu Aussagen über die Ausdehnung des Bereichs $[v_{\min}, v_{\max}]$ im Phasenraum, in dem die stochastische Beschleunigung auftreten kann. Wesentlich hierfür ist die Fourierdarstellung der Welle. Der stochastische Bereich wird dann durch die Phasengeschwindigkeiten derjenigen Moden festgelegt, deren Fourieramplitude oberhalb eines kritischen Spektrums liegt, das in einem gewissen Sinn optimal für die Teilchenbeschleunigung ist. Eine durch eben dieses kritische Spektrum gegebene Störung benötigt eine geringere mittlere Energiedichte als jede andere, um in einem gegebenen Intervall $[v_{\min}, v_{\max}]$ stochastische Beschleunigung von der Untergrenze $v_{\min}$ bis an den oberen Rand $v_{\max}$ zu ermöglichen. Diese Übertragung der zunächst für Langmuir-Wellen erhaltenen Ergebnisse auf lower-hybrid Wellen zeigte dann, daß für letztere diese minimale Energiedichte wesentlich höher sein kann. Hierdurch wird die Bedeutung der lower-hybrid Wellen für die Erzeugung schneller Elektronen u.U. eingeschränkt.

Mittels einer numerischen Repräsentation unseres Modells wurden schließlich die zentralen Aussagen über den Zusammenhang zwischen dem Spektrum der Störung und der Ausdehnung globaler Stochastizität im Phasenraum an einem Spezialfall verifiziert. Die Bestätigung, die unsere Überlegungen dabei erfuhren, ist gleichzeitig ein Hinweis auf die Tragfähigkeit des elementaren

CHIRIKOVschen Kriteriums von 1972 für das Verschwinden von KAM-Tori in einem nahezu integrablen System. So widersprechen unsere Ergebnisse dem neueren Kriterium der "noblen Tori" von GREENE (1979,1980), obwohl letzteres für die Standardabbildung zu präziseren Resultaten als die Overlap-Argumentation führt. Letztere hat also offenbar einen auf Kosten der Exaktheit breiteren Anwendungsbereich.

Die Teilchenbewegung in elektrostatischen oder elektromagnetischen Wellen wird in der Literatur üblicherweise beschrieben im Rahmen der quasilinearen Theorie [VEDENOV, VELIKHOV & SAGDEEV (1962), DRUMMOND & PINES (1962)] Eine analytische Lösung der entsprechenden Diffusionsgleichung unter geeigneten physikalischen Randbedingungen für hinreichend steile Potenzspektren, zu denen das kritische gehört, ergänzt die von WU et al. (1981) für flache Spektren gegebene. Sie zeigt, daß für solche Spektren nicht nur stochastische Beschleunigung einzelner Partikel auftritt, sondern auch ein Zuwachs an mittlerer Geschwindigkeit und Energie erwartet werden kann. Sie sagt ferner die Relaxation beliebiger Anfangsverteilungen in Verteilungen mit superthermischen, d.h. einem Potenzgesetz genügenden, Schwänzen voraus und gestattet es, die Relaxationszeit explizit abzuschätzen.

Die Ableitung der quasilinearen Theorie für unser Modell schließt jedoch den thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ bei konstanter mittlerer Energiedichte ein. Es bedarf daher einer expliziten Untersuchung, inwieweit die QLT auch für endliche Systeme anwendbar ist. Eine hierzu durchgeführte "Messung" des Diffusionskoeffizienten für unsere numerische Repräsentation des Modells zeigte dabei die Konsequenzen auf, die die Hamiltonsche Struktur des Problems für die Gültigkeit der QLT hat. So ist diffusives Verhalten nur in der Nähe jener Resonanzen zu erwarten, für die die Fourieramplituden der entsprechenden Moden oberhalb der des kritischen Spektrums liegen. Diese Bedingung hat zur Folge, daß in einem endlichen System quasilineares Verhalten nur zu erwarten ist, wenn die mittlere Energiedichte einen bestimmten Grenzwert überschreitet. Weiterhin fanden wir Hinweise auf eine Reduzierung

des Diffusionskoeffizienten gegenüber dem quasilinearen in der Umgebung von Resonanzen, deren Modeamplituden nur wenig über den kritischen liegen. Verantwortlich hierfür sind wohl als Barrieren für den Transport wirkende Cantori [MACKAY ET AL. (1984)]. Schließlich erscheint es im Licht unserer Ergebnisse möglich, daß die von DOVEIL & GRESILLON (1982) bzw. ISHIHARA & HIROSE (1984) beobachtete starke Verminderung des Diffusionskoeffizienten für große Störungen nur eine Folge der beschränkten Modenzahl in den zugrundeliegenden numerischen Simulationen ist. Eine weitergehende Überprüfung der QLT in diesem Parameterbereich würde es erfordern, mit ansteigender Störampplitude auch die Anzahl der Fouriermoden zu erhöhen.

Als wesentliche Ergebnisse sollten jedoch die Bestätigung der Chirikovschen Overlap-Argumentation (1972) und die durch deren detaillierte Anwendung gewonnenen Aussagen gesehen werden. Da für unser Vorgehen nur die Hamiltonsche Struktur, nicht aber die Beschränkung auf longitudinale Wellen essentiell war, kann mit gleichem Vorgehen auch für andere physikalische Situationen abgeschätzt werden, welche Wellenspektren für Teilchenbeschleunigung optimal sind und welche Energiedichte minimal erforderlich ist. Insbesondere zu denken wäre in diesem Zusammenhang an eine Diskussion der Heizung von Laborplasmen durch Ionen- oder Elektronenzyklotron-Wellen. Es sollte deutlich geworden sein, daß die zunächst sehr abstrakte und vielleicht künstlich erscheinende Theorie Hamiltonscher Stochastizität durchaus Konsequenzen für reale physikalische Situationen haben kann; dies aufzuzeigen war eines der Ziele der vorliegenden Arbeit.

ANHANG A NUMERISCHE INTEGRATION CHAOTISCHER TRAJEKTORIEN

Wir verwenden hier zur numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= E(x, t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

das Leapfrog-Verfahren

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + \Delta t \cdot v_i \\ v_{i+1} &= v_i + \Delta t \cdot E(x_{i+1}, t_{i+1}) \\ t_{i+1} &= t_i + \Delta t\end{aligned}\tag{A.2}$$

das [vgl. Potter (1972)] von der $O(\Delta t^2)$ ist, wobei v_i als $v(t=t_i + \frac{1}{2}\Delta t)$ verstanden wird. Die so definierte diskrete Abbildung ist, wie auch der Fluß der entsprechenden kontinuierlichen Gleichungen A.1, maßerhaltend im Phasenraum,

$$\frac{\partial(x_{i+1}, v_{i+1})}{\partial(x_i, v_i)} = 1,$$

eine für die in Kap.3.3 durchgeführten Rechnungen sehr wesentliche Eigenschaft.

Die lokale Fehlerordnung hat dagegen im Rahmen unserer Untersuchungen nur untergeordnete Bedeutung. Umfangreiche Studien [BENETTIN et al. (1978), ELSÄSSER, DÜCHS & SACK (1986)] zeigen zwar, daß in Gebieten globaler Stochastizität auf den hier verwendeten Zeitskalen die numerisch ermittelten Pseudoorbits stark von dem verwendeten Verfahren abhängen; sie scheinen daher zunächst ohne Bedeutung zu sein. Es gibt jedoch Parameterbereiche, in denen die Zeitmittel einer Größe $g(x, v)$ entlang einer Trajektorie $(x(t), v(t))$ bzw. Mittel über Ensemble mit verschiedenen Anfangsorten $x(t=0)$ noch nicht von der verwendeten

Diskretisierung bzw. (für hinreichend kleine Δt und kleine Zeiten) dem verwendeten Zeitschritt Δt abhängen [BENETTIN et al. (1978), ELSÄSSER & DEESKOW (1987)]. Die in Kap.4.5 betrachtete Varianz Δv^2 ist gerade solch ein Ensemblemittel, sodaß die präsentierten Ergebnisse als verläßlich angesehen werden können. Dies wurde selbstverständlich durch Wiederholen der entsprechenden numerischen Rechnungen mit unterschiedlichen Schrittweiten Δt für unsere Gleichungen 3.52 explizit nachgeprüft.

Bei der Integration der Differentialgleichung A.1 mittels der Diskretisierung A.2 setzt man nun implizit voraus, daß die Anfangsbedingungen (x_0, v_0) , die unter der Abbildung A.2 zu chaotischen Orbits führen, auch quasistochastischen Bahnen des kontinuierlichen Systems A.1 entsprechen. Dies ist apriori nicht der Fall, wie analytische Untersuchungen von USHIKI (1982) und numerische Studien von PRÜFER (1985) zeigen. Beide Autoren betrachten die logistische Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x),$$

deren analytische Lösung keinerlei chaotisches Verhalten aufweist. Diverse Diskretisierungsschemata dagegen führen gemäß USHIKI (1982) und PRÜFER (1985) zu Orbits mit quasistochastischem Verhalten, die -wie USHIKI (1982) beweist- auch für beliebig kleine Zeitschritte Δt auftreten. Für hinreichend kleines Δt jedoch approximieren die numerisch ermittelten Trajektorien in einem Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ sehr gut die exakte Lösung, wobei T mit abnehmendem Δt anwächst; erst für große Zeiten können sie ein abweichendes Verhalten zeigen. Die in Kap.3.3 ausgewerteten Rechnungen sind daher mit unterschiedlichem Δt wiederholt worden, um sicherzustellen, daß die dort beobachteten Strukturen nicht mehr vom Zeitschritt Δt abhängen. Die auftretende Stochastizität ist also nicht Folge einer mehr oder weniger willkürlich gewählten Diskretisierung, sondern eine intrinsische Eigenschaft der betrachteten Differentialgleichung 3.52.

LITERATUR

- Alfven, H. and Carlquist, P. (1967), *Solar Phys.* **1**, 220
- Arnold, V.I. (1963), *Sov. Math. Dokl.* **3**, 136
- Benettin, G., Casartelli, M., Galgani, L., Giorgilli, A. and Strelcyn, J.M. (1978), *Nuovo Cimento* **44B**, 183
- Benz, A.O. (1987), *Solar Phys.* **111**, 1
- Benz, A.O. and Smith, D.F. (1987), *Solar Phys.* **107**, 229
- Brown, J.C. (1971), *Solar Phys.* **18**, 489
- Bunemann, O. (1959), *Phys. Rev.* **115**, 503
- Chirikov, B.V. (1979), *Phys. Rep.* **52**, 265 (1979)
- Courant, R. and Hilbert, D. "Methoden der mathematischen Physik", Bd.1, 3.Aufl., S.368ff., Springer, Berlin
- Doveil, F. and Gresillon, D. (1982), *Phys. Fluids* **25**, 1396
- Drummond, W.E. and Pines, D. (1962), *Nucl. Fusion Suppl.* Pt.3, 1049
- Dulk, G.A. and Suzuki, S. (1980), *Astron. Astrophys.* **88**, 203
- Dupree, T.H. (1966), *Phys. Fluids* **9**, 1773
- Elsässer, K. and Deeskow, P. (1987),
- Elsässer, K., Düchs, D. and Sack, Ch. (1987), *Phys. Lett. A* **120**, 57
- Escande, D.F. (1985), *Phys. Rep.* **121**, 165
- Escande, D.F., Doveil, F. (1981), *J. Stat. Phys.* **26**, 257
- Fainberg, J. and Stone, R.G. (1974), *Space Sci. Rev.* **16**, 145
- Flynn, R.W. (1971), *Phys. Fluids* **14**, 956
- Forman, M.A., Ramaty, R. and Zweibel, E.G. (1986), in "Physics of the sun", eds. P.A. Sturrock, T.E. Holzer, D.M. Mihalas, and R.K. Ulrich, Reidel Publishing Company
- Fredericks, R.W. (1967), *J. Plasma Phys.* **1**, 241
- Fuchs, V., Krapchev, V., Ram, A. and Bers, A. (1985), *Physica* **14D**, 141
- Gary, S.P. and Montgomery, D. (1968), *Phys. Fluids* **11**, 2733
- Goldman, M.V., Reiter, F.G. and Nicholson, D.R. (1980), *Phys. Fluids* **23**, 388
- Goldmann, M.V. and Smith, D.F. (1986) in "Physics of the sun"
- Graham, K.N. and Fejer, J.A. (1976), *Phys. Fluids* **19**, 1054
- Greene, J.M. (1979), *J. Math. Phys.* **20**, 1183
- Greene, J.M. (1980), *Ann. New York Acad. Sci.* **357**, 80
- Horton, W., Choi, D.I., Yushmanov, P.N. and Parail, V.V. (1987), *Plasma Phys. Contr. Fus.* **29**, 901

- Hudson, H.S. (1972), *Solar Phys.* **24**, 414
- Hyong, P., Brown, J.C. and Van Beek, H.F. (1976), *Solar Phys.* **48**,
197
- Ichimaru, S. (1973), "Basic Principles of Plasma Physics",
Benjamin, Tokyo
- Ishihara, O. and Hirose, A. (1984), *Com. Plasma Phys. Contr.*
Fus. **8**, 229
- Kamke, E. (1977), "Differentialgleichungen", Bd.1, 9. Aufl.
Teubner, Stuttgart
- Kane, S.R. (1972), *Space. Sci. Rev.* **13**, 822
- Kane, S.R. (1980) in "Solar Flares"
- Kaplan, S.A. and Tsytovich, V.N. (1973), "Plasma Astrophysics",
Pergamon Press
- Karney, C.F.F. (1978) *Phys. Fluids* **21**, 1584
- Karney, C.F.F. (1979) *Phys. Fluids* **22**, 2188
- Karney, C.F.F. and Bers, A. (1977), *Phys. Rev. Lett.* **39**, 550
- Kolmogoroff, A.N. (1954), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, 527
- Krall, N.A. and Liewer, P.C. (1972), *Phys. Fluids* **15**, 1166
- Krall, N.A. and Trivelpiece, A.W. (1973), "Principles of Plasma
Physics", McGraw-Hill, New York
- Krlin, L., Pavlo, P., Tluchor, Z., and Gasek, Z. (1987), *Plasma
Phys. Contr. Fus.* **29**, 1653
- Kuperus, M. (1976), *Solar Phys.* **47**, 79
- Lichtenberg, A.J. and Liebermann, M.A. (1983), "Regular and
Stochastic Motion", Springer, New York, Heidelberg,
Berlin
- Lichtenberg, A.J. (1979), in "Intrinsic Stochasticity in
Plasmas", eds. G.Laval and D.Gresillon, p.13,
Orsay, Les Editions de Physic Courtaboeuf
- Lin, R.P. (1974), *Space Sci. Rev.* **16**, 189
- Lin, R.P., Mewaldt, R.A. and Van Hollebeke, M.A.I. (1982),
Astrophys. J. **253**, 949
- Mackay, Meis and Percival (1984), *Physica* **13D**, 55
- Magelssen, G.R. and Smith, D.F. (1977), *Solar Phys.* **55**, 211
- McBride, J.B., Ott, E., Boris, J.P. and Orens, J.H. (1972), *Phys.*
Fluids **15**, 2367
- Meiss, J.D. and Ott, E. (1986), *Physica* **20D**, 387
- Melrose, D.B. (1980), "Plasma Astrophysics Vol.2", Gordon and
Breach, New York
- Moser, J. (1962), *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **K1**,
1
- Moser, J. (1973), "Stable and Random Motions in Dynamical
Systems", *Annals of Math. Studies* **77**, Princeton

University Press, Princeton

- Percival, I.C. (1979), in "Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction", eds. Month and Herrera, Am. Inst. of Phys. New York
- Prüfer, M. (1985), SIAM J. Appl. Math. **45**, 32
- Ramaty, R. et al. (1980), in "Solar Flares", ed. P. Sturrock, Colorado Associated University Press
- Smith, D.F. (1977a), Astrophys. J. **212**, 891
- Smith, D.F. (1977b), Astrophys. J. **217**, 644
- Smith, D.F. and Priest, E.R. (1972), Astrophys. J. **176**, 487
- Smith, G.R. and Kaufmann, A.N. (1975), Phys. Rev. Lett. **34**, 1613
- Smith, G.R. and Kaufmann, A.N. (1978), Phys. Fluids **21**, 2230
- Spicer, D.S. (1977), Solar Phys. **53**, 305
- Spicer, D.S. (1981), Solar Phys. **70**, 149
- Tanaka, M. and Papadopoulos, K. (1983), Phys. Fluids **26**, 1697
- Ushiki, S. (1982), Physica **4D**, 407
- Vedenov, A.A., Velikov, E.P. and Sagdeev, R.Z. (1962), Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2, 465
- Watson, G.N. (1962), "Theory of Bessel Functions", 2nd edition, Cambridge
- Wu, C.S., Gaffey, J.D. and Liberman, B. (1981), J. Plasma Phys. **25**, 391
- Zaslavskii, G.M. and Chirikov, B.V. (1972), Sov. Phys. Uspekhi **14**, 549

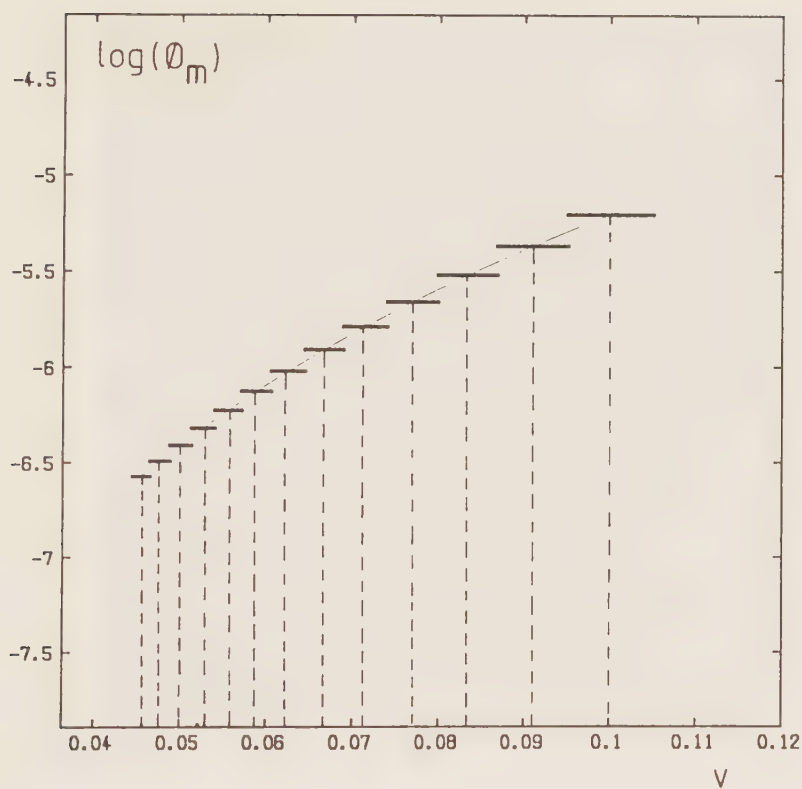


ABB. 1

Overlapdiagramm für das System 3.51 mit $\epsilon = \epsilon^* = 0.0625$
und $\eta = 4$

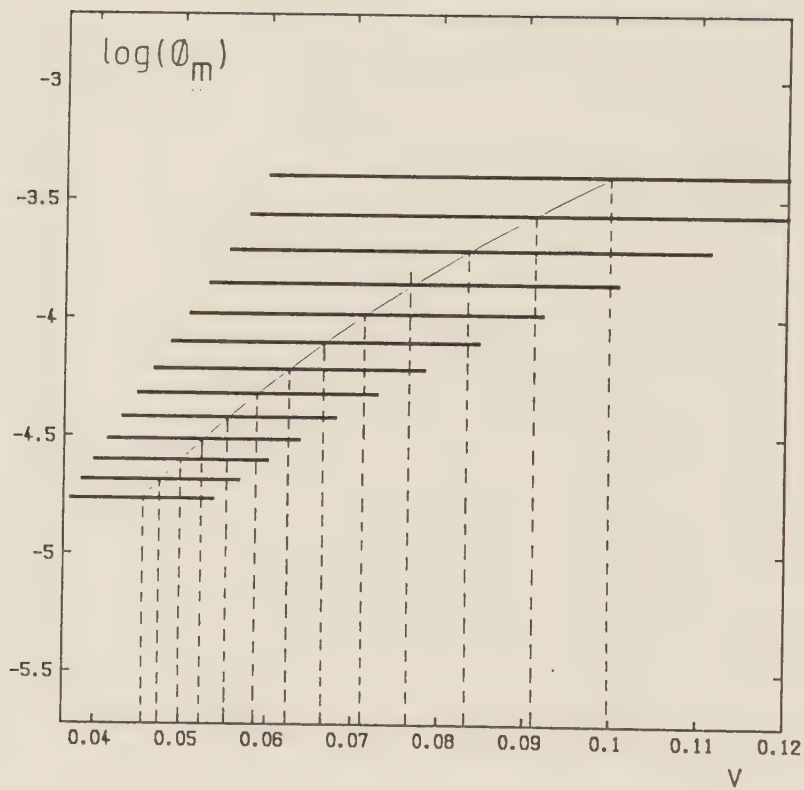


ABB. 2

Overlapdiagramm für das System 3.51 mit $\varepsilon = 4.0$ und $\eta = 4$

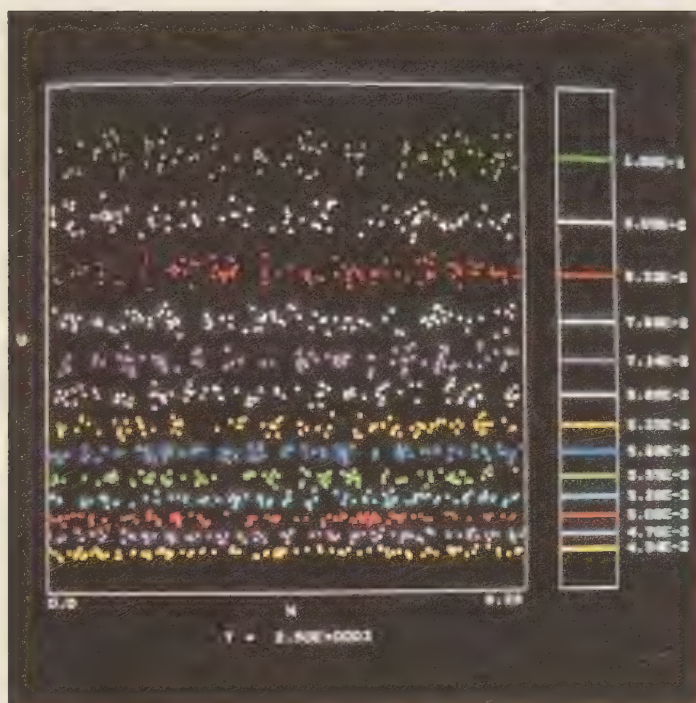


ABB. 3A

Positionen der Ensemblemitglieder für $T = 2500 \cdot 2\pi$. Die verschiedenen Ensemble f_k mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_k = 1/k$, $k=10 \dots 22$, sind durch verschiedene Farben gekennzeichnet. Es ist $\varepsilon = 0.033$ und $\eta = 4$, womit die Bouncefrequenzen zwischen $\omega_B^{-1} = 57$ für $k = 10$ und $\omega_B^{-1} = 124$ für $k=22$ liegen.

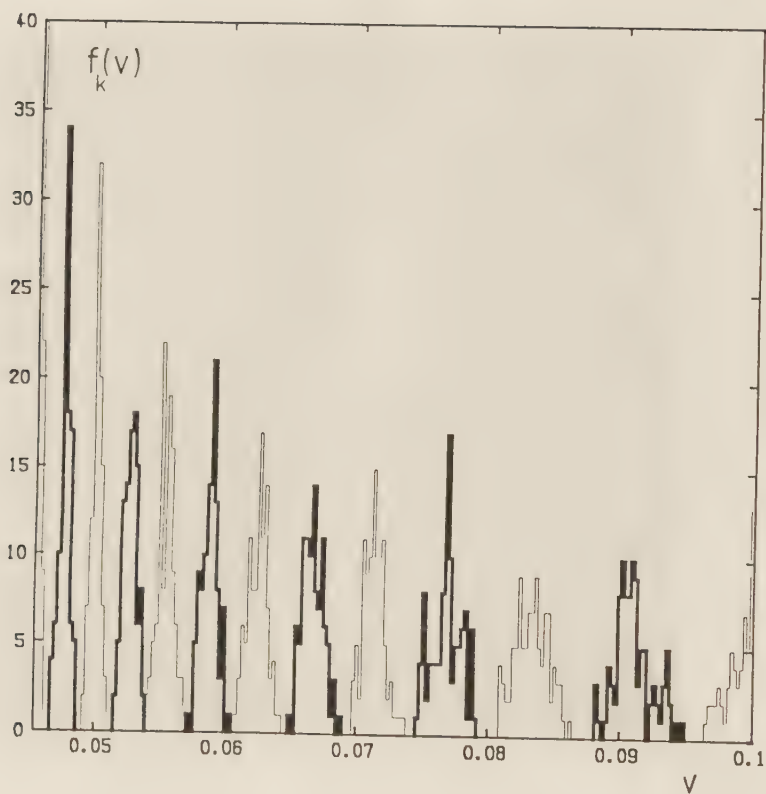


ABB. 3B

Histogrammdarstellung der gemittelten $f_{ok}(v,t)$ in einem gemeinsamen Diagramm zur Zeit $T = 2500 \cdot 2\pi$ für $\varepsilon = 0.033$ und $\eta = 4$.

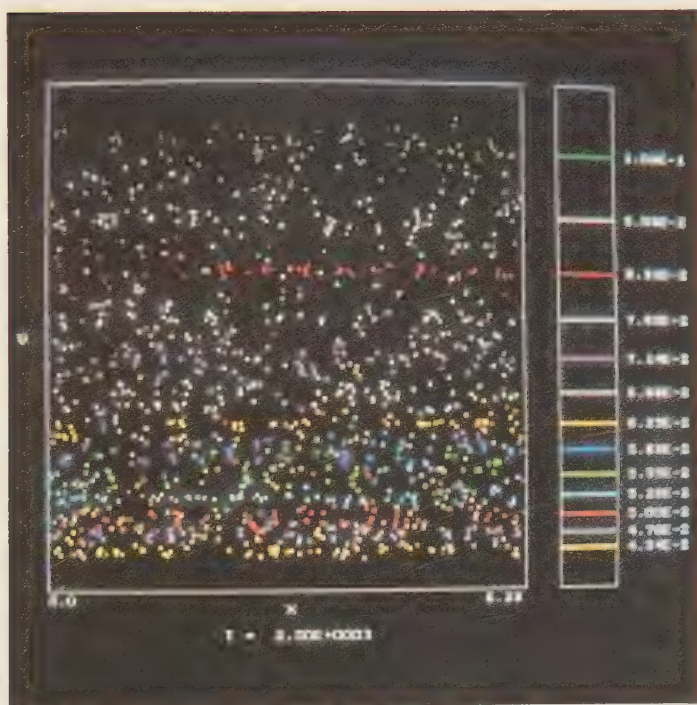


ABB. 4A

Positionen der Ensemblemitglieder für die Ensemble f_k mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_k = 1/k$, $k=10\dots22$ für $T=2500*2\pi$. Es ist $\varepsilon = 0.063$ und $\eta = 4.0$. Die Bouncefrequenzen liegen zwischen $\omega_B^{-1} = 40$ für $k = 10$ und $\omega_B^{-1} = 88$ für $k = 22$.

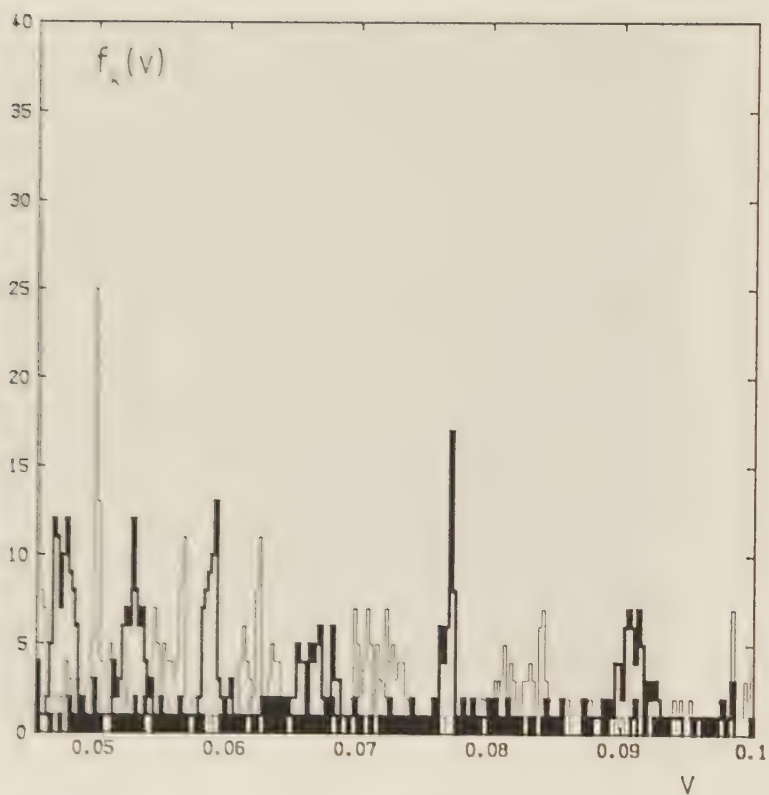


Abb. 4a

Histogrammdarstellung der gemittelten $f_{ok}(v,t)$ in einem gemeinsamen Diagramm zur Zeit $T = 2500 \cdot 2\pi$ für $\varepsilon = 0.0625$ und $\eta = 4.0$.

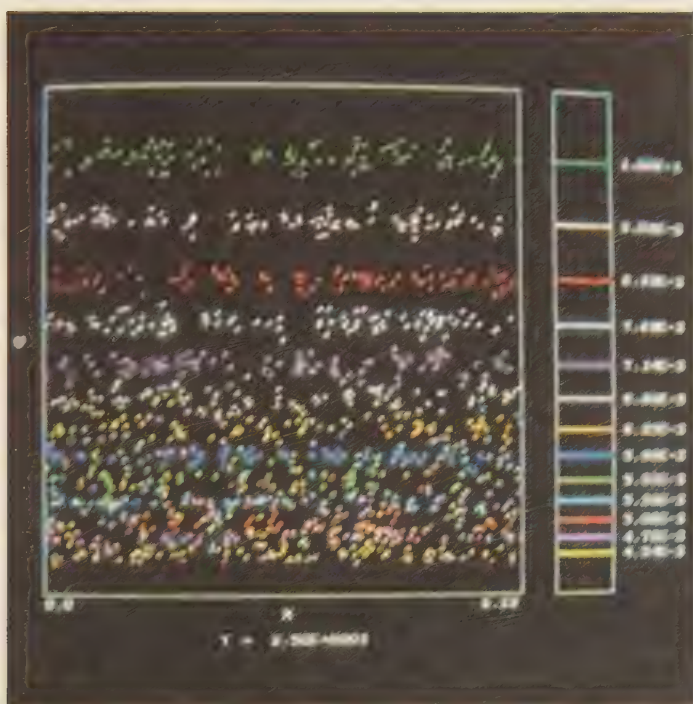


ABB 5A

Positionen der Kostenwertglieder für die Annahme r , mit
 Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 = 1/r$. $r = 10, 20$ für
 $T = 2155 \times 20$. Es ist $\alpha = 0.00012$ und $\eta = 2.0$. Die
 Breitenfrequenzen liegen bei $\omega_y = 75$ für alle r .

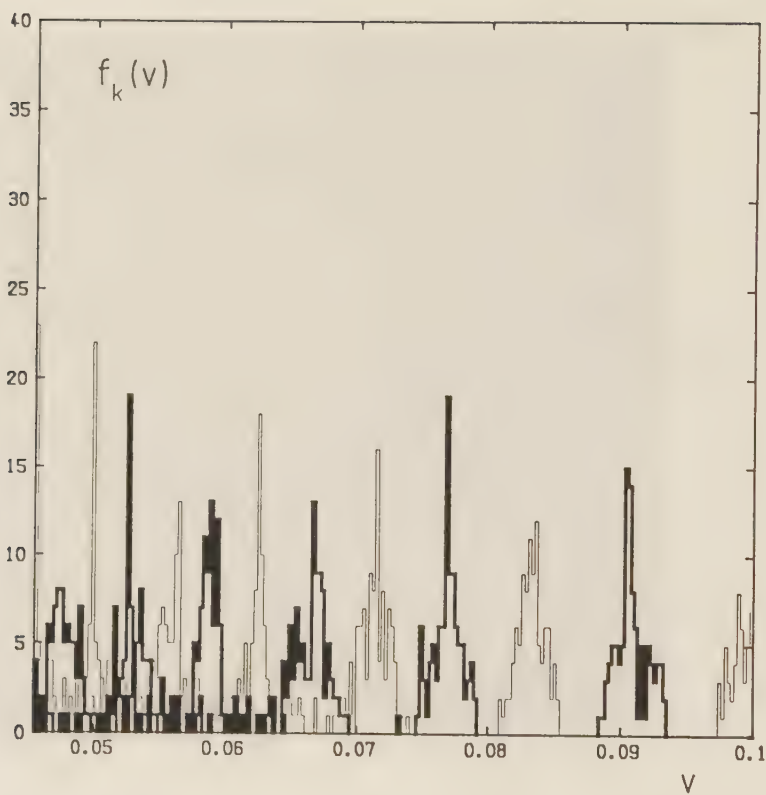


ABB. 5B

Histogrammdarstellung der gemittelten $f_{ok}(v,t)$ in einem gemeinsamen Diagramm zur Zeit $T = 2500 \cdot 2\pi$ für $\varepsilon = 0.00018$ und $\eta = 2$.

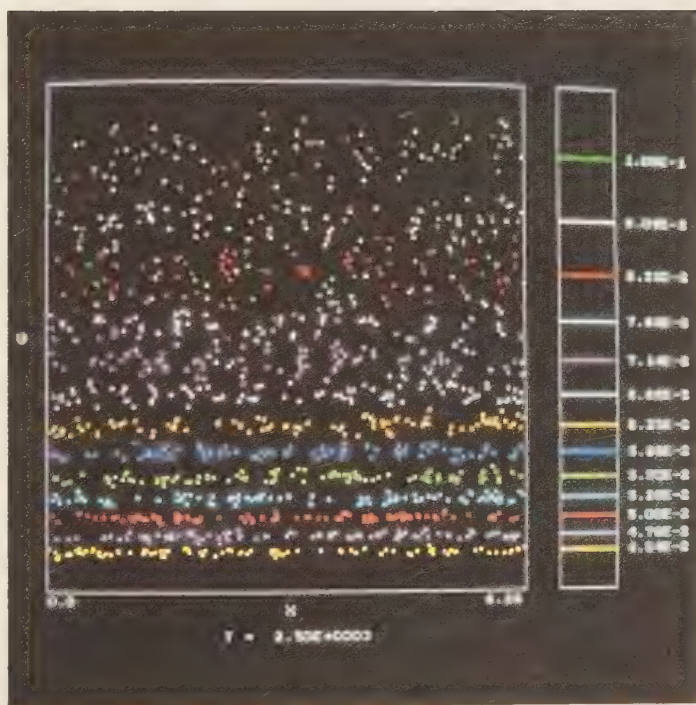


ABB. 6A

Positionen der Ensemblemitglieder für die Ensemble f_k mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_k = 1/k$, $k=10\dots22$ für $T = 2500 \cdot 2\pi$. Es ist $\varepsilon = 8.0$ und $\eta = 2.0$. Die Bouncefrequenzen liegen zwischen $\omega_B^{-1} = 35$ für $k = 10$ und $\omega_B^{-1} = 171$ für $k = 22$.

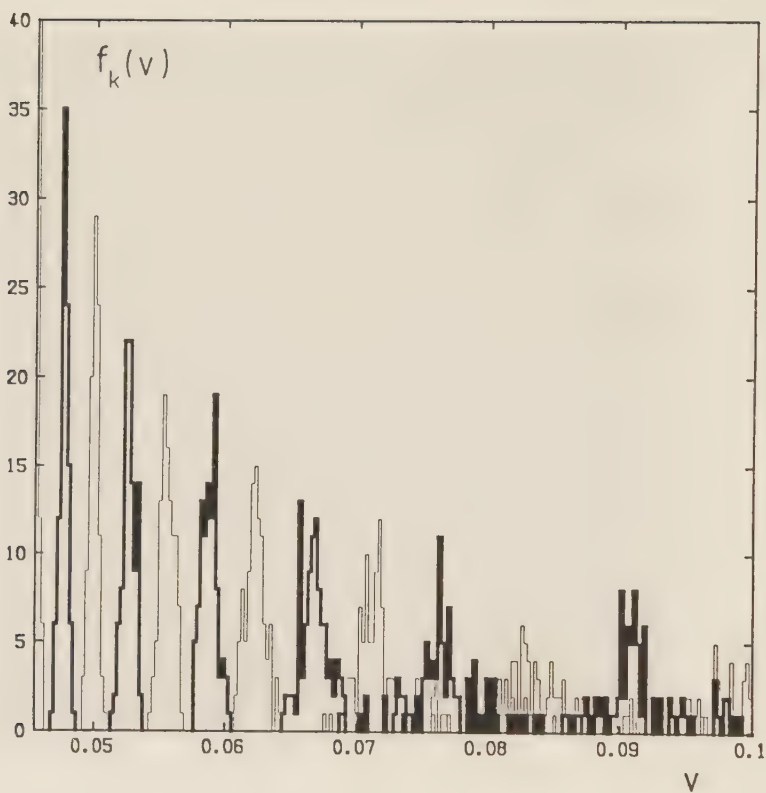


ABB. 6B

Histogrammdarstellung der gemittelten $f_{ok}(v,t)$ in einem gemeinsamen Diagramm zur Zeit $T = 2500 \cdot 2\pi$ für $\varepsilon = 8.0$ und $\eta = 2.0$.

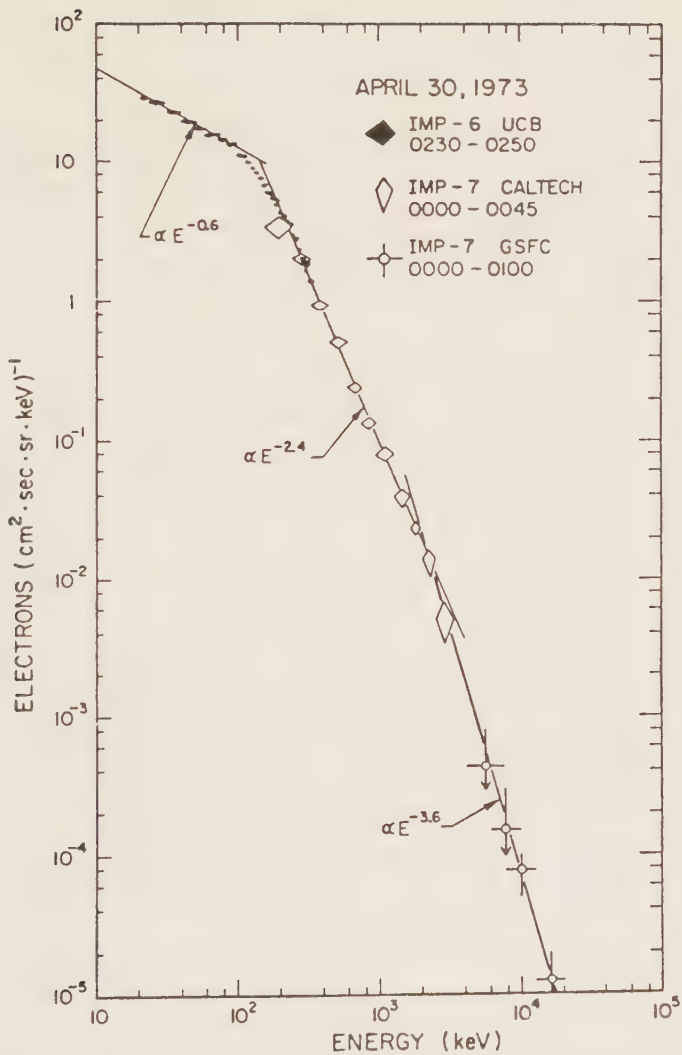


ABB. 7

Energiespektrum von schnellen Elektronen, die bei einer Sonnenfackel am 30.4.1973 auftraten [nach LIN et al. (1982), Abb. 5].

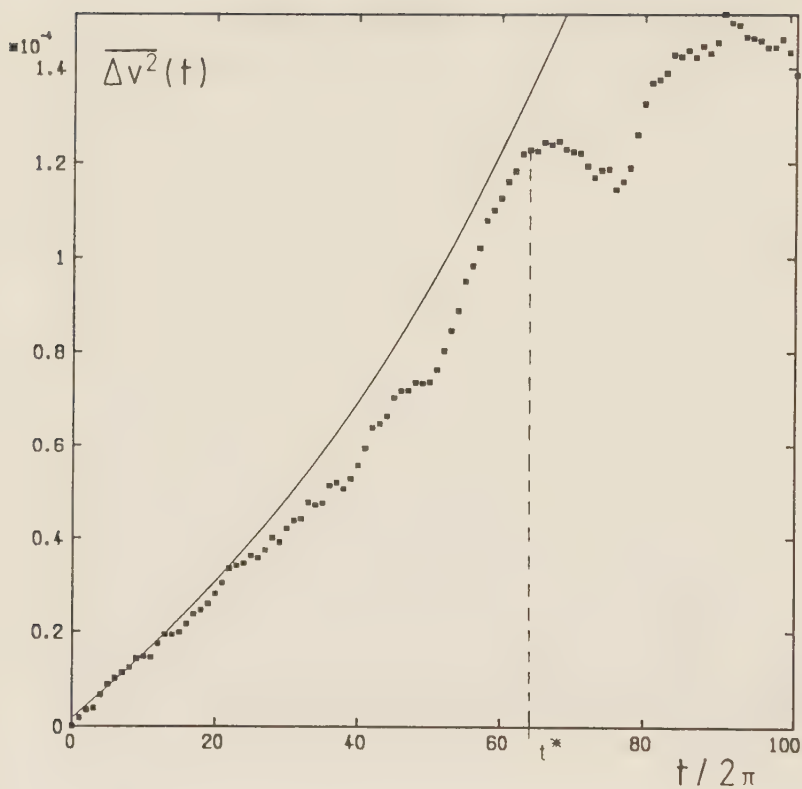


ABB. 8A

Zeitentwicklung von $\overline{\Delta v^2(t)}$ unter den Bewegungsgleichungen 3.51 mit $\varepsilon = 0.225$ und $\eta = 4$ für ein Ensemble mit Anfangsgeschwindigkeit $v_i = 1/15$ aus numerischer Simulation (Symbole) bzw. analytischer Lösung 4.88 (durchgezogene Linie). Bei t^* knickt die numerisch erhaltene Kurve von dem bis dahin im wesentlichen quasilinearen Verlauf ab.

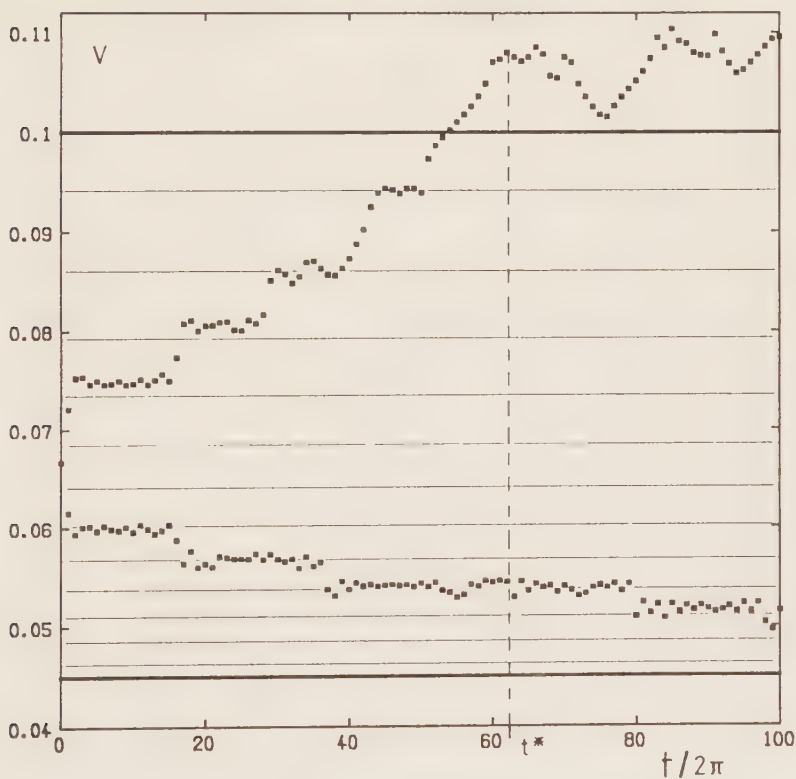


ABB. 8B

Geschwindigkeit des jeweils schnellsten bzw. langsamsten Teilchens des Ensembles aus Abb.8a (Symbole). Ferner eingezeichnet sind die Ränder des resonanten Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ (dicke Balken) und die "nobles" $v_i^n = [0, i, 1, 1, 1, \dots]$, $i = 10..22$, (dünne Linien). Bei t^* erreicht das erste Teilchen den Rand des stochastischen Bereiches. Die Inselbreite der letzten Resonanz $v_{\max} = 1/10$ beträgt $\Delta v_{\max} \approx 0.01$.

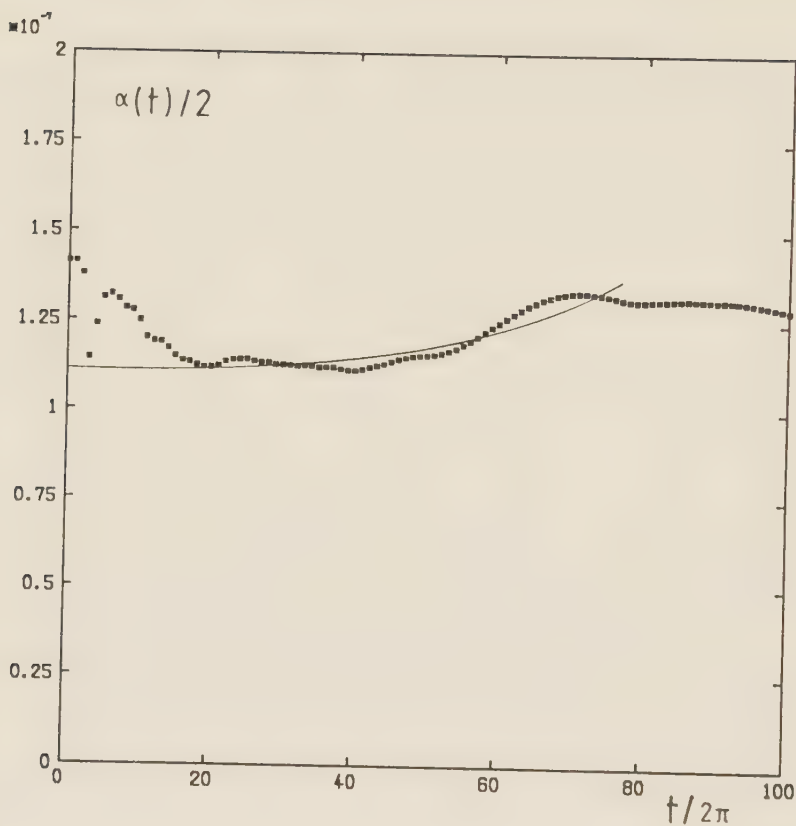


ABB. 9

Verlauf von $\alpha(t)/2$ für das Ensemble aus Abb.8a mit Anfangsgeschwindigkeit $v_k = 1/15$ für $\varepsilon = 0.225$ und $\eta = 4$ (Symbole) und Extrapolation gegen $t = 0$ (durchgezogene Linie). Es ist $D(v_k) \approx \alpha(t=0)/2 \approx 1.1 \cdot 10^{-7}$. 4.104 läßt gemäß der QLT $D(v_k) = 1.1 \cdot 10^{-7}$ erwarten.

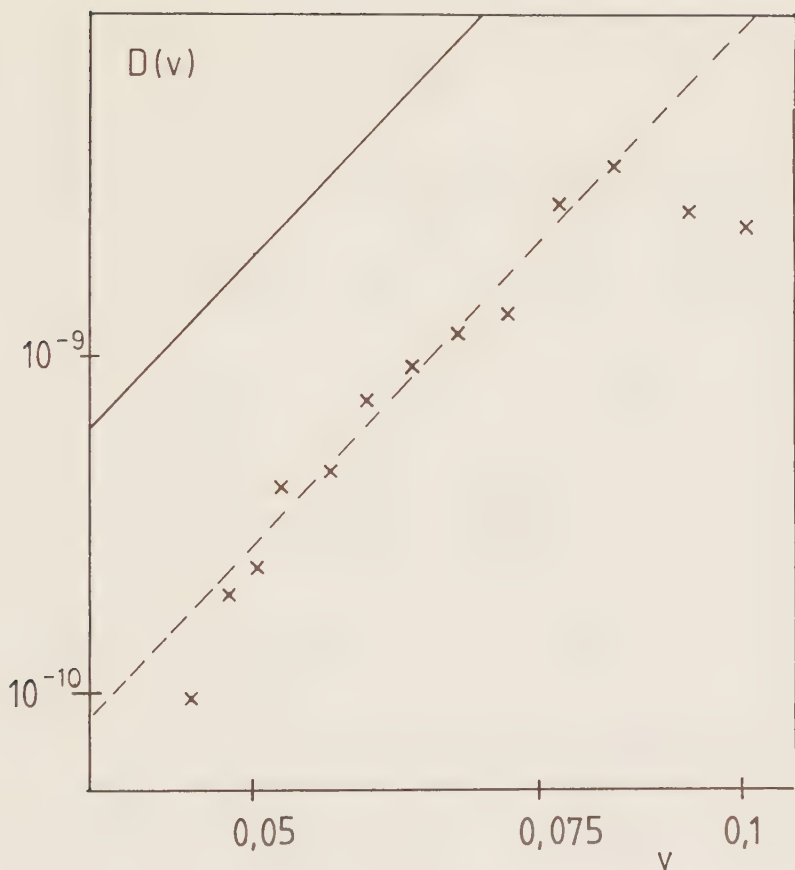


ABB. 10

Verlauf des gemessenen Diffusionskoeffizienten (Symbole und gestrichelte Linie) und des quasilinearen (durchgezogene Linie) als Funktion der Geschwindigkeit in doppelt logarithmischer Darstellung für $\varepsilon = 0.063$ und $\eta = 4$.

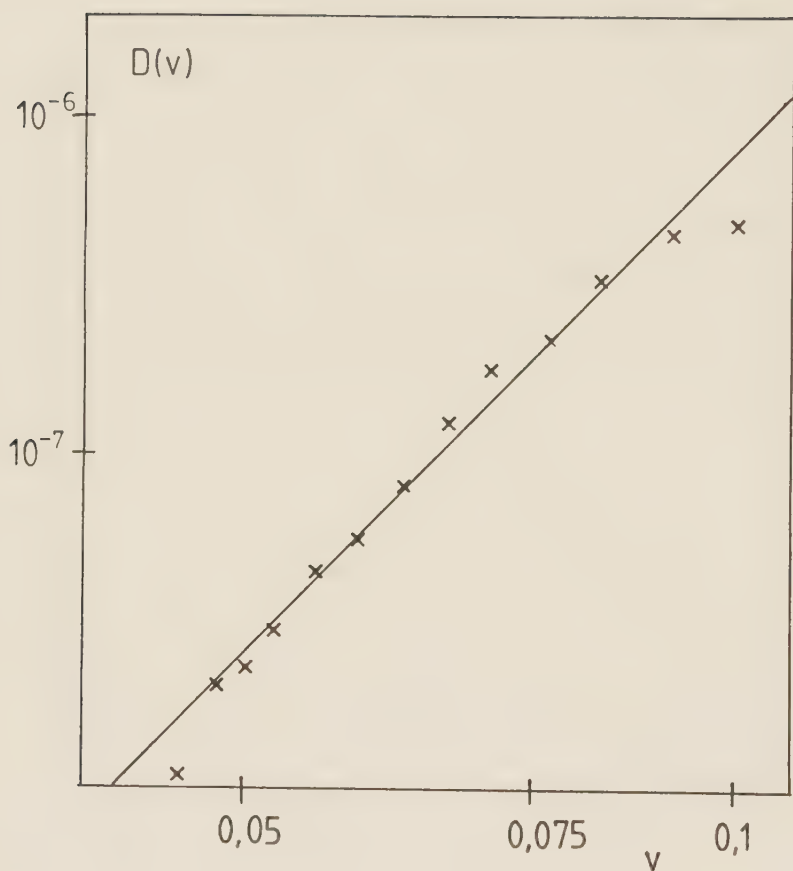


ABB. 11

Verlauf des gemessenen Diffusionskoeffizienten (Symbole und gestrichelte Linie) und des quasilinearen (durchgezogene Linie) als Funktion der Geschwindigkeit in doppelt logarithmischer Darstellung für $\varepsilon = 0.225$ und $\eta = 4$.

LEBENS LAUF

- 1962 am 30.6.62 in Duisburg geboren; Vater: Manfred Deeskow,
Mutter: Ingeborg Deeskow, geb. Fandel
- 1968 Einschulung in die (katholische) Stolzeschule in
Duisburg
- 1972 Eintritt in das städtische Max-Planck-Gymnasium in
Duisburg
- 1981 27.Juni: Entlassung vom Max-Planck-Gymnasium nach
bestandener Reifeprüfung
1.Oktober: Beginn des Studiums der Physik an der Ruhr-
Universität in Bochum
- 1983 7.Oktober: Diplom-Vorprüfung in Physik
- 1985-1986 Diplomarbeit bei Prof. Dr. Schamel zum Thema:
"Untersuchung zur Existenz zeitunabhängiger lokaler
Strukturen gekoppelter Felder in Plasmen"
- 1986 15.September: Diplomprüfung in Physik an der Ruhr-
Universität
1.Oktober: Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Prof. Dr.
Elsässer im Sonderforschungsbereich Plasma-
physik Bochum/Jülich (SFB 162)

Ich versichere, daß ich meine Dissertation

Kritische Fluktuationen und Diffusion in Hamiltonschen Systemen

selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe, und daß ich sie in der jetzigen oder in ähnlicher Form weder einer anderen Abteilung der Ruhr-Universität Bochum noch einer anderen Hochschule eingereicht habe.

Bochum, den

Peter Deeskow

